Appunti di logica matematica

dalle lezioni di G. Jacopini (a cura di M. Savarese)

16 settembre 2017

Capitolo 1

Teorie del primo ordine

Si dicono variabili, $x_k \in V$, gli infiniti simboli x_1, x_2, ... ; si dicono connettivi i due simboli: $\supset$, $\sim$.

Definizione. 1.1. Dicesi *teoria* $\mathcal{T}$ la coppia ordinata

$$\{\mathcal{T} = \Sigma_{\mathcal{T}}, A_{\mathcal{T}}\}$$

dove $\Sigma_{\mathcal{T}}$ rappresenta l'insieme dei simboli caratteristici della teoria e $A_{\mathcal{T}}$ quello degli assiomi.

Definizione. 1.2. *Simboli caratteristici*

L'insieme dei simboli caratteristici $\Sigma_{\mathcal{T}}$ è costituito da tre insiemi di simboli:

- $C_{\mathcal{T}}$ che rappresenta l'insieme delle costanti e può essere finito, infinito o eventualmente vuoto ed è costituito dai simboli c_1, c_2, ...
- $F_{\mathcal{T}}$ che rappresenta l'insieme dei simboli funzionali e può essere finito, infinito o eventualmente vuoto ed è costituito da simboli del tipo $f_7(\ ,\ )$, $f_{41}(\ ,\ ,\ ,\ )$, $f_{15}(\ )$, ... dove il numero dei posti vuoti tra parentesi può essere qualsiasi e analogamente può essere qualsiasi il numero che figura come indice;
- $R_{\mathcal{T}}$ che rappresenta l'insieme dei simboli relazionali e può essere finito o infinito, ma mai vuoto, ed è costituito da simboli analoghi a quelli funzionali con la differenza che al posto di f compare R come ad esempio $R_7(\ ,\ ,\ )$.

Definizione. 1.3. *Termini*

Per definire l'insieme degli assiomi $A_{\mathcal{T}}$ dobbiamo prima definire l'insieme dei termini $T_{\mathcal{T}}$, poi quello delle espressioni atomiche $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{A}}$, e infine quello delle espressioni $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$. Definiamo induttivamente l'insieme $T_{\mathcal{T}}$ nel modo seguente:

1.3.1. $V \subset T_{\mathcal{T}}$ (le variabili sono termini).

1.3.2. $C_{\mathcal{T}} \subset T_{\mathcal{T}}$ (le costanti sono termini).

1.3.3. $t_1 \in T_{\mathcal{T}}, t_2 \in T_{\mathcal{T}}, ..., t_n \in T_{\mathcal{T}}, f_i\left(\ ,\ ,...,\ \right) \in F_{\mathcal{T}} \Rightarrow f_i\left(t_1, t_2, ..., t_n\right) \in T_{\mathcal{T}}$ (le funzioni di termini sono termini).

Definizione. 1.4. *Espressioni atomiche*

Le espressioni atomiche di $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{A}}$ sono costituite da simboli relazionali i cui posti vuoti sono occupati da termini di $T_{\mathcal{T}}$.

Esempio. $R_7\left(f_7\left(f_{15}\left(x_6\right), c_3\right), c_1, f_{15}\left(x_{10}\right)\right)$

Definizione. 1.5. *Espressioni del calcolo predicativo*

Definiamo induttivamente l'insieme $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ nel modo seguente:

1.5.1. $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{A} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ (le espressioni atomiche sono espressioni).

1.5.2. $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \sim E \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ (se E è una espressione anche la sua negazione lo è, ovvero l'insieme è chiuso rispetto alla negazione).

1.5.3. $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \Rightarrow (E_1 \supset E_2) \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ (l'insieme è chiuso rispetto all'implicazione).

1.5.4. $x_k \in V, E \in \Rightarrow (x_k)\, E \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ (insieme è chiuso rispetto alla generalizzazione).

Definizione. 1.6. *Assiomi*

L'insieme, finito o infinito, degli assiomi $A_{\mathcal{T}}$ è costituito da espressioni di $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ che si chiamano assiomi della teoria.

Osservazione. 1.7. A volte nelle espressioni scriveremo x, y, z, e si intenderà che ognuna di queste lettere rappresenta un x_k con k opportuno.

Definizione. 1.8. *Sostituzione di un termine al posto di una variabile in un termine*

Definiamo induttivamente la sostituzione di un termine t al posto di una variabile x_i in un termine t', e la indichiamo $\frac{t}{x_i}t^{'}$.

1.8.1. $t' = x_j$ e $j \neq i$. Allora $\frac{t}{x_i}t' = x_j$.

1.8.2. $t' = x_i$. Allora $\frac{t}{x_i}t' = t$.

1.8.3. $t' = f_k\,(t_1, ..., t_n)$. Allora $\frac{t}{x_i}t' = f_k\left(\frac{t}{x_i}t_1, ..., \frac{t}{x_i}t_n\right) t$.

1.8.4. $t' = c_m$. Allora $\frac{t}{x_i}t' = c_m$.

Definizione. 1.9. *Sostituzione di un termine al posto di una variabile in una espressione*

Definiamo induttivamente la sostituzione di un termine t al posto di una variabile x_i in una espressione E, e la indichiamo $\frac{t}{x_i}E$.

1.9.1. $E = R_k\,(t_1, ..., t_n)$. Allora $\frac{t}{x_i}E = R_k\left(\frac{t}{x_1}t_1, ..., \frac{t}{x_1}t_n\right)$.

1.9.2. $E = \sim E'$. Allora $E = (E_1 \supset E_2)$. Allora $\frac{t}{x_1}E = \sim \frac{t}{x_i}E'$.

1.9.3. $E = (E_1 \supset E_2)$. Allora $\frac{t}{x_i}E = \left(\frac{t}{x_1}E_1 \supset \frac{t}{x_1}E_2\right)$.

1.9.4.1. $E = (x_i)\, E'$. Allora $\frac{t}{x_i}E = E$ (la sostituzione di una variabile quantificata è inefficace).

1.9.4.2. $E = (x_j)\, E'$ e $J \neq i$. Allora $\frac{t}{x_i}E = (x_j)\, \frac{t}{x_i}E'$.

Definizione. 1.9.5. *variabili libere e termini liberamente sostituibili*

1.9.5.1. Una variabile x_i occorre libera in una espressione E se $\frac{c_1}{x_1}E \neq E$ (ovvero se non è quantificata).

1.9.5.2. Un termine t è liberamente sostituibile al posto di x_i in un'espressione E se per tutte le variabili x_j che compaiono nel termine si verifica che $\frac{x_i}{x_j}\frac{x_j}{x_i}\frac{c_1}{x_j}E = \frac{c_1}{x_j}E$.

Osservazione. 1.9.6. Talvolta indicheremo con $E\,[x]$ e $E\,[t]$ rispettivamente una espressione in cui t sia liberamente sostituibile al posto di x e il risultato di tale sostituzione, cioè $\frac{t}{x}E\,[x] = E\,[t]$.

Definizione. 1.10. *Enunciato*

Una espressione H di $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ è un enunciato se in essa nessuna variabile occorre libera.

Definizione. 1.11. *Espressioni del calcolo proposizionale*

Le espressioni definite in 1.5. sono anche dette espressioni del calcolo predicativo. Ci servirà però anche definire l'insieme $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$ delle proposizioni del calcolo proposizionale. Diamo la seguente definizione induttiva di $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$.

1.11.1. $A_1, A_2, ...$(espressioni proposizionali atomiche, o atomi) $\in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}$.

1.11.2. $A \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}} \Rightarrow \sim A \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}$.

1.11.3. $\Delta, \Delta' \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}} \Rightarrow (\Delta \supset \Delta') \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}$.

Esempio. 1.11.4. $((\sim A_1 \supset (A_1 \supset A_2)) \supset A_4)$

Definizione. 1.12. *Assegnazione di valori di verità ad espressioni del calcolo proposizionale.*

Sia dato un insieme di due elementi $\{v, f\}$. Fare una assegnazione divalori diverità agli atomi di una espressione del calcolo proposizionale significa atrtibuire ad ogni A_k che compare nell'espressione un $v(A_k) \in \{v, f\}$.

Esempio. 1.12.0. per l'espressione 1.11.4. una possibile assegnazione A di valori di verità agli atomi che vi compaiono è la seguente:

$$A = \begin{cases} v(A_1) = v \\ v(A_2) = f \\ v(A_4) = v \end{cases}$$

Data un'assegnazione A di valori di verità agli atomi rimane associata all'espressione Δ un valore di verità $v_A(\Delta)$ nel seguente modo:

1.12.1. se $\Delta = A_k \Rightarrow v_A(\Delta) = v(A_k)$

1.12.2. se $\Delta = \sim A' \Rightarrow v_A(\Delta) \neq v(A')$

1.12.3. se $\Delta = (\Delta_1 \supset \Delta_2) \Rightarrow v_A(\Delta) = f$ se $v_A(\Delta_1) = v$ e $v_A(\Delta_2) = f$; $v_A(\Delta) = v$ in tutti gli altri casi.

Esempio. 1.12.4. Il valore di verità assegnato all'espressione 1.11.4. con l'assegnazione A dell'esempio 1.12.0. è v. Infatti

$v_A((A_1 \supset A_2)) = f$

$v_A(\sim A_1) = f$

$v_A(\sim A_1 \supset (A_1 \supset A_2)) = v$

$v_A(((\sim A_1 \supset (A_1 \supset A_2)) \supset A_4)) = v$

Osservazione. 1.12.5. É evidente che, se in una espressione compaiono n atomi distinti, le possibili assegnazioni di valori di verità sono 2^n. Nell'esempio 1.12.4. si ha $2^3 = 8$.

Definizione. 1.13. *Tautologia*

Dicesi tautologia ogni espressione del calcolo proposizionale il cui valore di verità è v per ogni possibile assegnazione.

Esempio. 1.13.1. L'espressione 1.11.4. non è una tautologia in quanto considerata la seguente assegnazione

$$A' = \begin{cases} v(A_1) = f \\ v(A_2) = v \\ v(A_4) = f \end{cases}$$

risulta $v_A(((\sim A_1 \supset (A_1 \supset A_2)) \supset A_4)) = f$.

Osservazione. 1.14. A volte indicheremo gli atomi di $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$ con le lettere A, B, C, ..., e si intenderà che ognuna di queste lettere rappresenta un A_k con k opportuno.

Esempio. 1.15. Sono tautologie le seguenti espressioni:

1.15.1. $(\sim A \supset (A \supset B))$

1.15.2. $(A \supset (B \supset A))$

1.15.3. $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$

1.15.4. $((A \supset\sim A) \supset\sim A)$

1.15.5. $(\sim A \supset (B \supset\sim (B \supset A)))$

1.15.6. $(A \supset (B \supset (A \supset B)))$

1.15.7. $(\sim (A \supset B) \supset A)$

1.15.8. $(\sim (A \supset B) \supset\sim B)$

1.15.9. $(A \supset A)$

1.15.10. $(\sim\sim A \supset A)$

Definizione. 1.16. *Assiomi logici*

Gli assiomi logici si dividono in assiomi logici proposizionali e assiomi logici predicativi.

Definizione. 1.16.1. *Assiomi logici proposizionali*

Dicesi assioma logico proposizionale qualunque istanza di una tautologia, cioè qualunque espressione di $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ ottenuta sostituendo espressioni di $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ al posto degli atomi, purchè a lettere uguali si sostituiscano espressioni uguali.

Esempio. $(\sim (R_1 (x, c_1) \supset R_2 (x)) \supset ((y) R_1 (x, y) \supset\sim ((y) R_1 (x, y) \supset (R_1 (x, c_1) \supset R_2 (x)))))$ è un assioma in quanto istanza della tautologia 1.15.5.

Definizione. 1.16.2. *Assiomi logici predicativi*

Gli assiomi logici predicativi sono di due tipi:

1.16.2.1. $((x) E [x] \supset E [t])$

Sono assiomi logici predicativi tutte le espressioni di questo tipo, dove x è una variabile qualsiasi (v. 1.9.6.).

1.16.2.2. $((x) (E_1 \supset E_2) \supset (E_1 \supset (x) E_2))$

Sono assiomi logici predicativi tutte le espressioni di questo tipo, dove E_2 è una espressione qualsiasi e E_1 è una espressione in cui la variabile x non occorre libera.

Definizione. 1.17. *Dimostrazione*

Dicesi dimostrazione in una teoria $\mathcal{T}$ una successione finita di espressioni della teoria $E_1, ..., E_n$, ognuna delle quali soddisfa una delle seguenti condizioni:

1.17.1. E_i è un assioma della teoria;

1.17.2. E_i è un assioma logico, proposizionale o predicativo;

1.17.3. E_i è ottenuta da espressioni precedenti nella dimostrazione facendo uso di una delle seguenti regole:

1.7.3.1. separazione (*modus ponens*); un'espressione $\bar{E}$ si dice che può essere ottenuta per separazione dalle due espressioni $\left(E' \supset \bar{E}\right)$ ed E'.

1.7.3.2. astrazione (*modus tollens*); $(x) E$ si dice ottenuta per astrazione da E.

Esempio. 1.17.4. Nella teoria $\bar{\mathcal{T}}$ tale che $C_{\bar{\mathcal{T}}} = \{c_1\}$, $F_{\bar{\mathcal{T}}} = \emptyset$, $R_{\bar{\mathcal{T}}} = \{R_1 (\ ), R_2 (\ ,\ )\}$, $A_{\bar{\mathcal{T}}} = \{\sim (R_1 (x) \supset R_2 (x, y))\}$ è una dimostrazione la seguente sequenza di espressioni:

$(\sim R_1 (x) \supset R_2 (x, y)) \supset R_1 (x)$ (istanza della tautologia 1.15.7)

$\sim (R_1 (x) \supset R_2 (x, y))$ (assioma della teoria)

$R_1 (x)$ (separazione)

$(x)\, R_1\, (x)$ (astrazione)

$((x)\, R_1\, (x) \supset R_1\, (c_1))$ (assioma logico predicativo)

$R_1\, (c_1)$ (separazione)

Definizione. 1.18. *Teorema*
Dicesi teorema della teoria $\mathcal{T}$ qualunque espressione E che sia l'ultima di una dimostrazione in $\mathcal{T}$ (o si dice anche che E è derivabile in $\mathcal{T}$) e si scrive:

$$\mathcal{T} \vdash E$$

Se E non è derivabile in $\mathcal{T}$ si scrive:

$$\mathcal{T} \nvdash E$$

ad esempio $R_1\, (c_1)$ è un teorema della teoria $\bar{\mathcal{T}}$ dell'esempio 1.17.4.
É evidente che in un dimostrazione qualunque espressione che vi compare è un teorema. Notiamo inoltre che sono teoremi tutti gli assiomi.

Definizione. 1.19. *Teoria consistente*

Una teoria $\mathcal{T}$ si dice consistente se in essa non si possono contemporaneamente derivare un'espressione E e la sua negazione $\sim E$.

Teorema. 1.20. *In una teoria inconsistente qualsiasi espressione è un teorema (ab absurdo, quodlibet).*

Se $\mathcal{T}$ non è consistente ed $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ allora $\mathcal{T} \vdash E$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{T}$ non è consistente, esiste una espressione E' tale che $\mathcal{T} \vdash E'$ e $\mathcal{T} \vdash \sim E'$. La dimostrazione di E sarà □

...

E'

$\sim E'$

$(\sim E' \supset (E' \supset E))$ (istanza della tautologia 1.15.1)

$(E' \supset E)$ (separazione)

E (separazione)

Osservazione. Siccome una teoria $\mathcal{T}$ è consistente se e solo se esiste almeno una espressione non derivabile scriveremo:

$$\mathcal{T} \text{ inconsistente} \iff \mathcal{T} \vdash$$

$$\mathcal{T} \text{ consistente} \iff \mathcal{T} \nvdash$$