Concetti primitivi: **punto**, **retta**, **piano**[1].

1. Assiomi di collegamento[2]

Assioma 1.0 Una retta contiene almeno due punti distinti. Un piano contiene almeno tre punti non allineati. Lo spazio contiene almeno quattro punti non complanari.
Assioma 1.1 Per due punti passa *una e una sola* retta.

Teorema 1.1 Se due rette distinte si intersecano allora esiste un unico punto di intersezione.
Dimostrazione: siano r e s due rette distinte e sia P il loro punto di intersezione. Supponiamo per assurdo che esista un secondo punto Q di intersezione, distinto da P. L' Assioma 1.1 ci dice però che per due punti passa una sola retta, le due rette perciò non sono distinte come invece avevamo supposto. Siamo arrivati ad una contraddizione, il punto Q pertanto non può esistere.

---

[1] Il concetto di definizione è per Euclide essenzialmente diverso dal nostro. Egli nelle prime definizioni tenta di descrivere cosa sia un punto (ciò che non ha parti), una retta (quella che giace egualmente rispetto ai suoi punti) come se questi enti geometrici esistessero davvero in natura. Per i matematici moderni invece una definizione è qualcosa di molto più semplice: è una sorta di abbreviazione, invece di dire "quadrilatero con i lati opposti paralleli" diciamo "parallelogramma". I concetti primitivi restano definiti (nel senso etimologico di delimitati) dai postulati; una retta per noi è semplicemente quella "cosa" che passa per due punti ed è unica.

[2] La formulazione moderna degli assiomi della geometria è relativamente recente, è dovuta ad Hilbert che la realizzò alla fine dell'800. Abbiamo conservato la divisione in cinque gruppi riducendone il numero e semplificandoli (si veda: D. Hilbert - *Fondamenti della geometria* - Feltrinelli, 1970).
Notiamo che dei postulati euclidei sopravvive solo il primo e il quinto:
1. *Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.*
2. *E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.*
3. *E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio.*
4. *E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.*
5. *E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*

Per la geometria dello spazio citiamo inoltre i seguenti assiomi e teoremi:
Assioma 1.2 Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
Assioma 1.3 Se una retta passa per due punti di un piano allora essa giace interamente sul piano.
Assioma 1.4 Se due piani si intersecano la loro intersezione è una retta.

Teorema 1.2 Se esistono una retta r e un punto P non appartenente a r allora esiste un unico piano che contiene r e P.
Dimostrazione: per l'assioma 1.0 la retta r contiene almeno due punti distinti, siano A e B. I punti A, B, P, per ipotesi, non sono allineati. L'assioma 1.2 garantisce che per i tre punti non allineati A, B, P passa uno e un solo piano α. Per l'assioma 1.3 tutti i punti della retta r (quella che passa per A e B) appartengono ad α. Quindi solo il piano α contiene P e r.

Teorema 1.3 Se due rette si intersecano allora appartengono allo stesso piano.
Dimostrazione: Siano r e s le due rette, sia P il loro punto di intersezione. Sia Q un punto di r distinto da P (che esiste per il l'assioma 1.0). Q non può stare su s, perché altrimenti r e s coinciderebbero avendo due punti in comune. Per il teorema 1.2 esiste un unico piano α contenente Q e s. D'altra parte il piano α, contenendo Q e s, contiene Q e P e quindi contiene la retta QP (retta r). Dunque r e s appartengono ad α.

2. Assiomi di ordinamento

Assioma 2.1 La retta è un insieme ordinato di punti e fra due suoi punti esiste sempre un altro punto.
Assioma 2.2 Se una retta entra in un triangolo essa ne esce pure (Assioma di M. Pasch, 1843-1930).

Teorema 2.1 I punti di una retta sono infiniti.
Dimostrazione: banale.

3. Assiomi di congruenza

Assioma 3.1 Se A e B sono due punti di una retta a e inoltre A' è un punto sulla stessa retta o su un'altra retta a', si può sempre trovare un punto B' da una data parte della retta a' rispetto ad A' tale che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$.

Osservazione: Questo assioma consente di trasportare segmenti (movimento rigido nello spazio). Il vocabolo congruente va inteso nel senso di sovrapponibile. Uguale si usa con il significato di: lo stesso, in comune.

Assioma 3.2 Se due segmenti sono congruenti ad un terzo allora sono congruenti fra loro.

4. Assioma delle parallele

Assioma 4.1 Per un punto esterno ad una retta passa *una e una sola* parallela (formulazione moderna del quinto postulato di Euclide dovuta a J. Playfair, 1748-1819).

5. Assiomi di continuità

Assioma 5.1 Dati due segmenti qualsiasi esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore (Assioma di Archimede).

Assioma 5.2 Gli elementi della geometria (cioè punti, rette, piani) costituiscono un sistema che non è più suscettibile di ampliamento (Assioma di completezza, J. W. Dedekind, 1831-1916).

definizioni: semiretta, segmento (ovvie)

1. **angolo:** parte del piano compresa fra due semirette (lati) aventi la stessa origine (vertice);
2. **angoli consecutivi:** hanno in comune il vertice e un lato;
3. **angoli adiacenti:** consecutivi con i lati non comuni appartenenti alla stessa retta;
4. **angolo retto:** se una retta intersecandone un'altra forma quattro angoli uguali allora gli angoli si chiamano retti e la retta si chiama perpendicolare[3];
5. **angoli opposti al vertice:** con i lati dell'uno sui prolungamenti dei lati dell'altro;
6. **angoli supplementari:** la cui somma è un angolo piatto[4];
7. **angoli complementari:** la cui somma è un angolo retto;
8. **bisettrice di un angolo:** semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti;
9. **rette parallele:** quando non hanno nessun punto in comune oppure coincidono;
10. **retta perpendicolare:** vedi definizione 4;
11. **asse di un segmento:** retta perpendicolare al segmento passante per il punto medio.

Teorema degli angoli opposti al vertice (prop. 15): se due angoli sono opposti al vertice allora sono congruenti.
dim: banale.

Costruzioni: triangolo equilatero (prop.1), punto medio (prop.10), perpendicolare (prop.11 e 12), angolo congruente (prop.23), bisettrice di un angolo (prop.9).

TRIANGOLI

definizioni sui triangoli: bisettrice, mediana, altezza, triangolo isoscele, rettangolo, scaleno, acuto, ottuso.

Primo criterio di congruenza dei triangoli (prop.4)
Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso, allora sono congruenti.
dim: mediante movimento rigido (o meglio postularlo).
oss: è interessante chiedersi se il criterio valga anche se l'angolo non è quello compreso[5].

Secondo criterio di congruenza dei triangoli (prop.26)
Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.
dim: come il primo.
oss: Il criterio vale anche se il lato non è quello compreso fra i due angoli visto che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi. Questo teorema però non è stato ancora dimostrato e quindi evidentemente non può essere utilizzato.

Teorema del triangolo isoscele (prop. 5 - Pons Asinorum)
Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.
dim:[6] tracciamo la bisettrice, i due triangoli che si formano sono congruenti per il primo criterio.

Teorema della bisettrice di un triangolo isoscele
La bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è anche altezza e mediana.
dim: corollario del teorema precedente.

Inverso del teorema del triangolo isoscele [7](prop. 6)
Se un triangolo ha due angoli congruenti allora è isoscele.
dim: prolunghiamo i lati che vogliamo dimostrare congruenti di due segmenti congruenti scelti a piacere. Congiungiamo gli estremi con gli estremi della base del triangolo ottenendo due triangoli sotto la base congruenti per primo criterio. Consideriamo poi gli altri due triangoli contenenti i lati della tesi, questi risultano congruenti per il secondo criterio.

Terzo criterio di congruenza dei triangoli (prop. 8)
Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre lati, allora sono congruenti.
dim: Trasportiamo il secondo triangolo sotto il primo facendo coincidere un lato e congiungiamo i due vertici. Otteniamo due triangoli isosceli di cui la congiungente è la base. Usiamo poi il teorema del triangolo isoscele.

Teorema dell'angolo esterno (prop. 16)
In un triangolo l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti ad esso.
dim: tracciamo la mediana e prolunghiamola di un segmento congruente, si formano due triangoli congruenti.
Corollario del teorema dell'angolo esterno: la somma di due angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto[8].

Altri teoremi sui triangoli:
Teorema: a lato maggiore si oppone angolo maggiore (prop. 18);
dim: sul lato maggiore si costruisce un segmento congruente al lato minore in modo da formare un triangolo isoscele che avrà gli angoli alla base uguali; uno di questi è anche angolo esterno dell'altro triangolo in cui risulta diviso il triangolo di partenza. Utilizzando il teorema dell'angolo esterno si arriva alla tesi.
Teorema inverso: ad angolo maggiore si oppone lato maggiore (prop. 19); dim: per assurdo
Corollario: in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.
Teorema: in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (prop. 21).
dim: tracciamo l'altezza relativa al lato maggiore e usiamo il corollario precedente.

---

[3] Abbiamo preferito usare la definizione Euclidea, potevamo anche definire prima l'angolo piatto (i lati appartengono alla stessa retta) e dire poi che l'angolo retto è la metà di uno piatto.
[4] Gli angoli adiacenti sono supplementari (ovvio) ma vale il viceversa?
[5] La risposta è negativa. Nel triangolo acuto ABC (con AB lato maggiore) puntiamo il compasso in C e con raggio CA intersechiamo il lato AB nel punto D. I triangoli ABC e DBC hanno due lati e un angolo congruenti.
[6] Nel tardo Medioevo questo teorema, completo di dimostrazione e figura, era chiamato "ponte degli asini" a quanto pare con riferimento alle difficoltà che si incontravano nel dimostrarlo. La dimostrazione di Euclide infatti non fa uso della bisettrice perché questa non è stata ancora costruita (prop. 9) ed è notevolmente più complessa (simile alla dimostrazione del teorema inverso).
[7] Non c'è modo di dimostrare questo teorema in modo analogo al diretto (cioè tracciando la bisettrice o la mediana o l'altezza). Si tenti per esercizio.
[8] Come già osservato non possiamo utilizzare il teorema della somma degli angoli interni di un triangolo perché questo teorema non è stato ancora dimostrato (vedremo che per dimostrarlo dovremo utilizzare un apposito postulato).

RETTE PERPENDICOLARI

definizioni:

1. piede della perpendicolare (punto in cui la perpendicolare interseca la retta);
2. proiezione ortogonale di un punto e di un segmento;
3. distanza di un punto da una retta (lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e la proiezione ortogonale del punto sulla retta)[9].

Rette tagliate da una trasversale

nomenclatura degli angoli: alterni (interni ed esterni), corrispondenti, coniugati (interni ed esterni).

RETTE PARALLELE

Teorema delle rette parallele (prop.28): Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele.
dim: per assurdo, supponiamo che si incontrino formando un triangolo. Applicando il teorema dell'angolo esterno arriviamo ad una contraddizione.

Osservazione: è impossibile[10] dimostrare l'inverso del teorema delle rette parallele utilizzando solo teoremi precedenti, siamo purtroppo costretti a ricorrere ad un apposito assioma, il famoso assioma 4.1, il quinto postulato di Euclide (per un punto esterno ad una retta passa *una e una sola* parallela)[11].

Inverso del teorema delle rette parallele (prop.29): due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti.
dim: per assurdo, supponiamo che gli angoli alterni non siano congruenti. Tracciamo allora la retta che forma angoli alterni congruenti, essa sarà parallela per il teorema precedente. Ma allora per un punto esterno ad una retta passano due parallele.

Proprietà transitiva del parallelismo (prop.30): due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.
dim: per assurdo, se non fossero parallele si intersecherebbero, ma allora per un punto esterno passerebbero due parallele.
corollario: rette parallele a rette incidenti sono incidenti.
dim: per assurdo.

Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo (prop.32): la somma degli angoli interni è un angolo piatto.
dim: si traccia la parallela ad un lato passante per il vertice dimostrando il lemma che l'angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso.

corollario 1: in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari;
corollario 2: gli angoli di un triangolo equilatero valgono tutti 60 gradi[12];
corollario 3: due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un lato e due angoli qualsiasi (criterio di congruenza generalizzato).

Somma degli angoli interni di un poligono convesso: In un poligono convesso di n lati la somma degli angoli interni vale: $(n\text{-}2)\cdot 180^0$.
dim: verifica diretta dividendo il poligono in triangoli.
corollario: in un poligono regolare di n lati ogni angolo vale $\frac{n-2}{n}180^{0}$.

Criterio di congruenza per i triangoli rettangoli: Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti rispettivamente l'ipotenusa e un cateto.
dim: muoviamo uno dei due triangoli sovrapponendo il cateto congruente, otteniamo un triangolo isoscele.

---

[9] E la minima possibile, perché?

[10] Il V postulato ha suscitato fin dall'antichità perplessità circa la sua evidenza che, indubbiamente, devono aver tormentato lo stesso Euclide, il quale lo utilizza il più tardi possibile, solo a partire dalla prop. 29 (oggi la geometria che non fa uso di questo postulato è chiamata geometria assoluta).

[11] Notiamo che la formulazione euclidea di questo postulato *(se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti)* è diversa da quella attuale *(per un punto esterno ad una retta passa una e una sola parallela).* Dimostriamo l'equivalenza delle due formulazioni. Si noti che il concetto di equivalenza fra proposizioni è un concetto relativo. Definiamo infatti due proposizioni P e Q equivalenti rispetto alle proposizioni $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se a partire da $A_1, A_2, \ldots, A_n$, P si può dimostrare Q e viceversa a partire da $A_1, A_2, \ldots, A_n$, Q si può dimostrare P. Nella dimostrazione di equivalenza che ci interessa, le proposizioni A_1, A_2, A_3, A_4 saranno i postulati della geometria euclidea, escluso il V; è ovvio che in queste dimostrazioni si possono sfruttare anche le proposizioni deducibili dai primi quattro postulati cioè le prime 28. Dimostriamo quindi che:
a) dal V postulato segue l'unicità della parallela. Infatti, supponiamo per assurdo che per un punto P passino due rette a e b parallele a una retta r. Esse sono allo stesso tempo incidenti (perché passano per il punto P) e parallele (perché per la prop. 30 rette parallele ad una stessa retta sono parallele fra loro). Il che è assurdo.
b) Dall'unicità della parallela segue il V postulato. Infatti, siano r e s due rette che, tagliate dalla trasversale t, formino due angoli α e β tali che $\alpha + \beta < 2$ retti. Sia AE la retta per A che forma con AB un angolo γ tale che $\gamma + \beta = 2$ retti. AE risulta distinta da r, poiché $\gamma > \alpha$, e risulta parallela a s per la proposizione 28. Dall'unicità della parallela segue allora che r non può essere parallela a s e che di conseguenza essa incontra s.
Si possono trovare molte altre proposizioni equivalenti al V postulato, per esempio:

1. Se una retta interseca una di due rette parallele, allora interseca anche l'altra.
2. Rette parallele sono equidistanti (Posidonio, I a.C.).
3. Rette parallele alla stessa retta sono parallele fra loro.
4. La totalità dei punti equidistanti da una retta data, e dalla medesima parte di essa, costituisce una retta (G. Vitale, 1680).
5. Rette che non sono equidistanti convergono in una direzione e divergono nell'altra (P. A. Cataldi, 1603).
6. Su un segmento dato è sempre possibile costruire un triangolo simile ad un triangolo dato (J. Wallis, 1663 - L.N. Carnot, 1803 - A. M Legendre, 1824)
7. Esiste una coppia di triangoli simili e non congruenti (G. Saccheri, 1733).
8. In ogni quadrilatero con tre angoli retti, anche il quarto è retto (A.C. Clairaut, 1741 - J.H. Lambert, 1766).
9. La somma degli angoli di un triangolo è 180^0 (G. Saccheri, 1733 - A.M. Legendre, inizio sec. XIX).
10. È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque area data (K. F. Gauss, 1799).
11. Dati tre punti non allineati è sempre possibile tracciare una circonferenza per tutti e tre i punti (A.M. Legendre - F. Bolyai, inizio sec. XIX).

Si è scelta la formulazione attuale perché appare la più semplice ed evidente (per altre proposizioni equivalenti si veda: R. Trudeau - *La rivoluzione non euclidea* -Bollati Boringhieri, 1991 - p.145).

[12] Gli angoli sono tutti uguali per il teorema del triangolo isoscele.

PARALLELOGRAMMA

definizione Un parallelogramma è un quadrilatero con i lati opposti paralleli

Teorema - *Condizioni necessarie per il parallelogramma*
Se un quadrilatero è un parallelogramma allora
1. ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti;
2. i lati opposti sono congruenti;
3. gli angoli opposti sono congruenti;
4. gli angoli adiacenti a ogni lato sono supplementari;
5. le diagonali si incontrano nel loro punto medio.

dim. il n. 1 si dimostra applicando il secondo criterio di congruenza e l'inverso del teorema delle rette parallele, gli altri sono tutti corollari.

Teorema - *Condizioni sufficienti affinché un quadrilatero sia un parallelogramma*
Se un quadrilatero ha
1. i lati opposti congruenti
2. gli angoli opposti congruenti
3. le diagonali che si incontrano nel loro punto medio
4. due lati opposti congruenti e paralleli

allora è un parallelogramma.
dim. nel n. 1 si traccia una diagonale e si applica il terzo criterio di congruenza, poi il teorema diretto delle parallele; la dimostrazione degli altri è simile.

RETTANGOLO

definizione Un rettangolo è un parallelogramma con gli angoli congruenti.

Teorema - Condizione necessaria e sufficiente affinché un parallelogramma sia un rettangolo è che le diagonali siano congruenti.
osservazione: ci troviamo di fronte ad una condizione necessaria e sufficiente quindi dobbiamo dimostrare due cose: che un rettangolo ha le diagonali congruenti e poi che, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti allora è un rettangolo.

ROMBO

definizione Un rombo è un parallelogramma con i lati congruenti.

Teorema - Condizione necessaria e sufficiente affinché un parallelogramma sia un rombo è che le diagonali siano perpendicolari fra loro oppure siano bisettrici degli angoli.
osservazione: in questo caso dobbiamo effettuare quattro dimostrazioni.

QUADRATO

definizione Un quadrato è un parallelogramma con i lati e gli angoli congruenti.

Teorema - *Condizione necessaria per il quadrato*
Un quadrato ha le diagonali congruenti, perpendicolari e bisettrici degli angoli.

Teorema - *Condizioni sufficienti perché un parallelogramma sia un quadrato*
1. Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e perpendicolari allora è un quadrato.
2. Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo, allora è un quadrato.

TRAPEZIO

definizione Un trapezio è un quadrilatero con due lati paralleli. Trapezio isoscele è un trapezio con i lati obliqui congruenti.

Teorema - Condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio sia un trapezio isoscele è che gli angoli adiacenti a ciascuna base siano congruenti.
dim. la condizione necessaria si dimostra tracciando le altezze e notando che i triangoli che si vengono a formare sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

Teorema del fascio di rette parallele - Dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra.

Teorema - Se in un triangolo si congiungono i punti medi di due lati, il segmento che si ottiene è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.
dim. la prima parte è una conseguenza diretta del teorema del fascio di rette, per dimostrare la seconda tracciamo la parallela ad una lato passante per uno dei punti medi, essa interseca l'altro lato nel punto medio (sempre per il teorema del fascio); considerando il parallelogramma che si viene a formare si arriva alla tesi.

corollario: in un triangolo rettangolo la mediana all'ipotenusa è congruente alla sua metà.

CIRCONFERENZA E CERCHIO

definizioni circonferenza, cerchio, arco, corda, diametro, angolo al centro e alla circonferenza.

Teorema - Un diametro è maggiore di qualsiasi corda
dim. congiungiamo gli estremi della corda col centro ottenendo un triangolo isoscele. Usiamo poi il teorema che afferma che un lato è minore della somma degli altri due.

Teorema - Se un diametro è perpendicolare ad una corda questa risulta divisa per metà.
dim. congiungiamo gli estremi della corda col centro, otteniamo due triangoli rettangoli con l'ipotenusa e un cateto congruenti.
Teorema inverso - Un diametro che divide per metà una corda è ad essa perpendicolare.
dim. banale.

Teorema - Se due corde sono uguali allora hanno stessa distanza dal centro.
dim. vedi teoremi precedenti.

Costruzione della circonferenza passante per 3 punti (si tracciano gli assi, l'intersezione è il centro della circonferenza).
Posizioni di una retta rispetto ad una circonferenza (esterna, tangente e secante).

Teorema dell'angolo al centro - L'angolo al centro è il doppio di qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.
dim. Bisogna considerare i tre casi possibili. Nel primo un lato dell'angolo alla circonferenza contiene un diametro. Si congiunge l'altro estremo dell'arco con il centro ottenendo un triangolo isoscele; si usa poi il teorema dell'angolo esterno. Gli altri casi si ottengono per somma e differenza.

Oss. Il teorema dell'angolo al centro vale anche per angoli alla circonferenza con un lato tangente.
Corollario 1: la tangente ad una circonferenza forma con il raggio un angolo retto (prolungando il raggio otteniamo un angolo alla circonferenza con lato tangente e l'altro contenente un diametro).
Corollario 2: un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.
Corollario 3: un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari.

Teorema delle tangenti ad una circonferenza da un punto esterno - Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono le tangenti ad essa i segmenti di tangenza sono congruenti.
dim. Congiungendo il punto esterno con il centro si ottengono due triangoli rettangoli (per il corollario 1 del teorema del'angolo al centro) con l'ipotenusa e un cateto congruenti.

Corollario: in un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.

PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

L'intersezione degli assi si chiama **circocentro**
N.B. bisogna prima dimostrare che gli assi si incontrano in uno stesso punto (basta notare che i punti dell'asse sono equidistanti dagli estremi del segmento); il circocentro pertanto è il centro della circonferenza circoscritta.
L'intersezione delle bisettrici si chiama **incentro** (le bisettrici si incontrano perché l'incentro è equidistante dai lati del triangolo - è il centro della circonferenza inscritta).
L'intersezione delle altezze si chiama **ortocentro**.
(N.B. l'ortocentro può essere anche esterno al triangolo - per la dimostrazione tracciamo per ogni vertice del triangolo la parallela al lato opposto, il triangolo interno ha i vertici nei punti medi, il circocentro del triangolo esterno è quindi l'ortocentro di quello interno).
L'intersezione delle mediane si chiama **baricentro**, si può dimostrare che il baricentro divide ognuna delle mediane in due parti una il doppio dell'altra (si utilizza il teorema dei punti medi di un triangolo).

Costruzioni: con Cabri si può verificare che l'ortocentro, il baricentro e il circocentro giacciono su una stessa retta. Su di essa giace anche il centro della circonferenza di Eulero, che è la circonferenza passante per i punti medi dei lati; essa è detta anche circonferenza dei nove punti, perché?

EQUIVALENZA DI SUPERFICI PIANE

def. due superfici si dicono equivalenti se hanno la stessa area (area è un concetto primitivo).
post. due superfici congruenti sono equivalenti.

Equivalenza di due parallelogrammi
Teorema – Se due parallelogrammi hanno congruenti le basi e le altezze allora sono equivalenti.
Dim: si sovrappongono le basi e si dimostra che i due triangoli che risultano sono congruenti.

Equivalenza fra parallelogramma e triangolo
Teorema – Un triangolo è equivalente a un parallelogramma con la stessa altezza e base pari alla metà.
Dim: tracciamo la parallela alla base passante per il vertice opposto. Dal punto medio della base tracciamo la parallele all'altro lato. Il parallelogramma che ne risulta è equivalente al triangolo iniziale perché i due triangoli piccoli sono congruenti.

Equivalenza fra triangolo e trapezio
Teorema – Un trapezio è equivalente ad un triangolo che ha stessa altezza e base congruente alla somma delle basi.
Dim: prolunghiamo la base del trapezio di un segmento congruente all'altra base. Congiungiamo un vertice opposto con l'estremo della base allungata. I due triangoli ottenuti sono congruenti (si applica sempre il teorema inverso delle parallele).

Equivalenza fra triangolo e poligono circoscritto alla circonferenza.
Teorema – Un poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo che ha base congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza.
Dim: basta osservare che tutti i triangoli di cui è composto il poligono hanno la stessa altezza.

Costruzioni
Dato un poligono convesso costruirne un altro equivalente con un lato in meno.
Dato un triangolo costruirne un altro equivalente di altezza o di base assegnata.
Dato un poligono convesso costruire un rettangolo equivalente con un lato assegnato.

Primo teorema di Euclide.
Teorema di Pitagora.
Secondo teorema di Euclide.