Bibliografia e sitografia

[1] A. Drivet – L. Orio, *Napoleone, Steiner e Cabri*, Quaderni Didattici del Dip. Mat. Università di Torino, 35 (2005), pagg. 1-23.
[2] Liang-Shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry*, MAA Spectrum (1995).
[3] M. Mantegna, *Applicazioni dei numeri complessi alla geometria dei triangoli*, Archimede, LXI, 2 (2009), pagg.75-81.
[4] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/-*Feb07*/Napoleone.html
[5] http://www.robertobigoni.eu/Matematica/Napoleone/Napoleone.html
[6] http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml

UN PROBLEMA DA DISCUTERE

Un trapezio rettangolo con le diagonali perpendicolari

Un problema di geometria solida sui solidi di rotazione (1) esordiva nel seguente modo: «Un trapezio rettangolo $ABCD$ ha le basi CD e AB lunghe rispettivamente 9 cm e 16 cm e le diagonali perpendicolari fra loro». Dopo la richiesta principale, che non ci interessa più di tanto, si chiedeva di dimostrare che l'altezza del trapezio è media proporzionale tra le basi e inoltre di calcolare le misure delle due diagonali.

Il problema ha destato il nostro interesse perché il trapezio va disegnato in qualche modo e il disegno non è immediato: a pensarci bene si tratta proprio di una costruzione, di quelle che si facevano una volta con riga e compasso. Ci siamo messi all'opera in una classe, quasi per gioco, alla ricerca di una possibile costruzione e dopo un po' uno studente (2) ha trovato una prima soluzione.

Sia AB la base maggiore assegnata e sia H il punto di AB tale che AH sia uguale alla base minore assegnata (figura 1); da A e da H si traccino le perpendicolari ad AB. Si disegni poi la semicirconferenza di diametro AB e sia K la sua intersezione con la perpendicolare per H; con centro in A si tracci la circonferenza di raggio AK e sia D l'intersezione fra la circonferenza e la perpendicolare per A. Infine, sia C l'intersezione fra la retta HK e la parallela ad AB passante per D: $ABCD$ è il trapezio cercato.

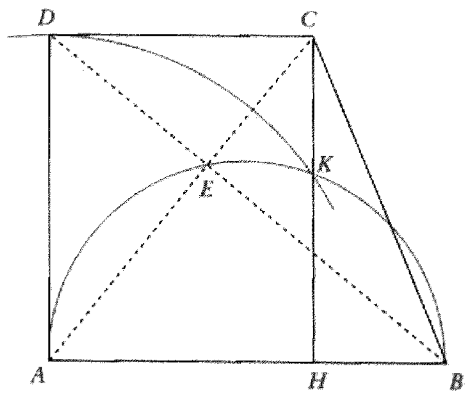

Figura 1

(1) Dodero, Baroncini, Manfredi – *Nuovi lineamenti di matematica*, Ghisetti e Corvi, 2008.
(2) Alessandro Averardi, classe 4G a.s. 2010/11, Liceo Scientifico Statale «A. Righi» di Roma.

La costruzione è corretta, ma una sua giustificazione per via puramente geometrica non è affatto banale. Si può procedere in vari modi. Si può, per esempio, tracciare la diagonale maggiore DB e chiamare E il punto d'intersezione con la semicirconferenza: si deve dimostrare che i punti A, E, C sono allineati (ovvero che l'angolo DEC è retto). La dimostrazione è ostica perché in figura i tre punti appaiono allineati ed è spontaneo confondere il punto E (intersezione tra BD e la semicirconferenza) con il punto d'incontro delle diagonali.

La costruzione comunque è corretta; un collega [3] coinvolto nella questione è ricorso alla geometria analitica e l'ha prontamente dimostrata. Scegliamo A come origine del sistema di riferimento e poniamo $AB = a$, $DC = b$, $AK = AD = h$. L'equazione della retta AC è $y = hx/b$, mentre l'equazione della retta DB è $y = -hx/a + h$. Per il primo teorema di Euclide applicato al triangolo AKB si ha $h^2 = ab$: si ottiene così che il prodotto dei coefficienti angolari delle due rette è $-h^2/ab = -1$, il che garantisce la perpendicolarità.

Una giustificazione geometrica è arrivata in seguito, ancora da uno studente [4]. Si consideri il triangolo rettangolo AKB in figura 1; per il primo teorema di Euclide $AH : AK = AK : AB$; ma $AH = DC$ e $AK = AD$ per cui $\frac{DC}{AD} = \frac{AD}{AB}$ (l'altezza del trapezio è media proporzionale fra le basi).

Pertanto, i triangoli rettangoli CDA e DAB hanno i cateti in proporzione e, quindi, sono simili; ne segue che l'angolo $\widehat{DAC}$ è uguale a $\widehat{ABD}$, da cui si conclude che le diagonali sono perpendicolari.

Il trapezio gode di varie proprietà interessanti.

In primo luogo, è immediato che i tre triangoli rettangoli ABE, DAE, CDE hanno gli stessi angoli, e dunque sono simili. Ne segue che i lati corrispondenti sono in proporzione:

$$\frac{EC}{ED} = \frac{ED}{EA} = \frac{EA}{EB} \qquad \text{e} \qquad \frac{ED}{DC} = \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{AB}.$$

Dalle proporzioni appena citate si ritrova facilmente che l'altezza AD è media proporzionale fra le basi. Proprio questa circostanza suggerisce indirettamente una costruzione alternativa del trapezio, più facile da giustificare.

Costruiamo una semicirconferenza avente per diametro la somma delle basi $PQ + QR$ (figura 2) e tracciamo il segmento QH perpendicolare al diametro, con H punto della semicirconferenza. Ovviamente PH è perpendicolare a HR. Da H tracciamo un segmento HS parallelo al diametro, uguale a QR e nel semipiano in

(3) Professor Vincenzo Carocci.
(4) Federico Glaudo, classe 4G a.s. 2011/12.

cui giace PQ. Il trapezio $PQHS$ è quello voluto: HR e SQ sono lati opposti di un parallelogramma e quindi sono paralleli; dunque PH è perpendicolare a SQ.

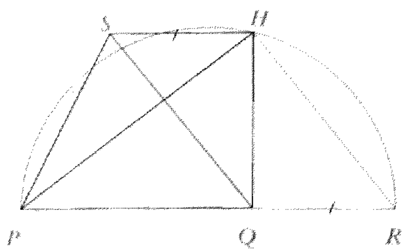

Figura 2

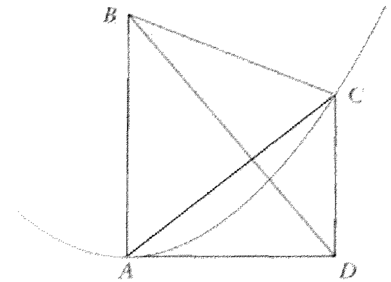

Figura 3

Disponiamo ora il trapezio in un riferimento cartesiano, ma ribaltiamolo in modo da porre una base AB, supposta di lunghezza unitaria, sull'asse delle ordinate, con il vertice A nell'origine (figura 3). Se h è l'altezza AD del trapezio, l'equazione della diagonale passante per B sarà $y = -x/h + 1$; l'equazione dell'altra diagonale sarà data dalla retta perpendicolare passante per l'origine, cioè $y = hx$. A questo punto si ottiene facilmente che il vertice C del trapezio ha coordinate $(h; h^2)$, ovvero che il luogo geometrico del secondo estremo dell'altra base è una parabola.

Un trapezio con proprietà analoghe si trova nella storia della matematica, in collegamento con uno dei tre famosi problemi dell'antichità, la ***duplicazione del cubo***. Andiamo con ordine.

Un metodo per duplicare un quadrato consiste nel costruire un segmento x medio proporzionale tra due segmenti dati a e $2a$. Una semplice costruzione geometrica è nota fin dall'antichità: basta far riferimento, per esempio, al secondo teorema di Euclide (figura 4) e si trova la proporzione $a : x = x : 2a$, da cui $x^2 = 2a^2$.

Naturalmente per duplicare un quadrato ci sono altri metodi, anche più semplici, ma il metodo descritto ha il vantaggio di poter essere immediatamente esteso al caso in cui si voglia triplicare un quadrato, o, in generale, risolvere geometricamente l'equazione $x^2 = ka^2$ (con k razionale).

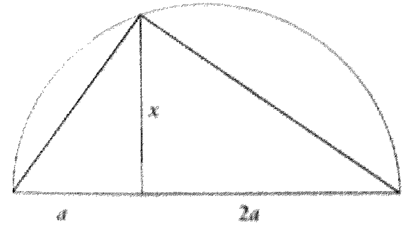

Figura 4

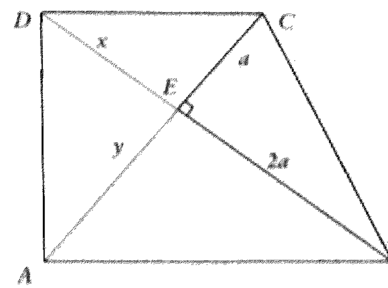

Figura 5

Pare che si debba ad Ippocrate di Chio, discepolo di Pitagora vissuto tra il V e il IV secolo a.C., un tentativo per affrontare in maniera analoga il problema della duplicazione del cubo. Supponiamo di riuscire, dato un segmento a, a costruirne altri due x, y che formino le proporzioni $a : x = x : y = y : 2a$. Con semplici passaggi, si ricava allora l'equazione $x^3 = 2a^3$, che rappresenta la traduzione algebrica del problema della duplicazione del cubo.

Come costruire geometricamente i due segmenti x e y a partire da a? Ebbene, si pensò proprio a un trapezio rettangolo con le diagonali perpendicolari, solo che non erano assegnate le basi, ma due fra i quattro segmenti in cui si tagliano le diagonali.

Vediamo come si procede. Consideriamo di nuovo il trapezio rettangolo $ABCD$ e sia E l'intersezione delle diagonali perpendicolari. Fissiamo $EC = a$ (lo spigolo del cubo che si vuole duplicare) ed $EB = 2a$; allora lo spigolo del cubo di volume doppio è uguale al segmento DE.

Per dimostrarlo, ricordiamo la proporzione $\frac{EC}{ED} = \frac{ED}{EA} = \frac{EA}{EB}$ che abbiamo visto prima (quando abbiamo osservato che i tre triangoli rettangoli ABE, DAE, CDE sono simili fra loro). Ponendo $ED = x$ ed $EA = y$ si ha appunto:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \qquad \text{da cui, come abbiamo detto, si ottiene} \qquad x^3 = 2a^3.$$

Oggi sappiamo che il trapezio non è costruibile con riga e compasso, quindi inutile provarci. Ma c'è una soluzione, già nota nell'antichità, in cui si ricorre ad un artificio meccanico.

Pensiamo di saldare insieme, perpendicolarmente, le due diagonali formando una croce, nella quale il segmento EB sia il doppio del segmento EC (spigolo del cubo che vogliamo duplicare). Separatamente, saldiamo due aste m e l nel loro estremo A in modo da formare un angolo retto. Una terza asta n, con un estremo su l, sia libera di scorrere rimanendo parallela all'asta m. A questo punto bisogna cercare di sovrapporre la croce alle due aste parallele in modo tale che il punto C si trovi sull'asta n, il punto B su m, il prolungamento di CE passi per A e quello di BE passi per il punto di intersezione D di l e n.

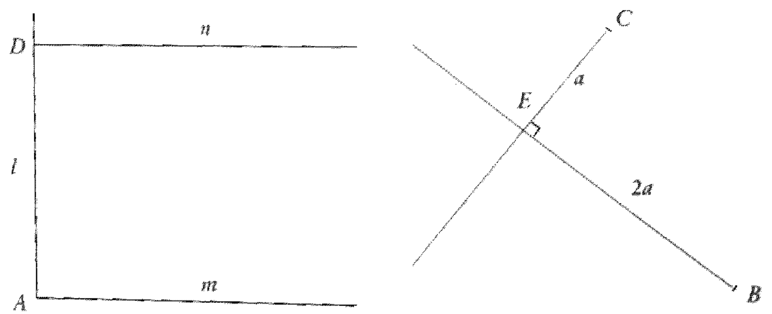

Figura 8

Con un opportuno scorrimento dell'asta n e con un'opportuna rotazione delle aste disposte a croce, si riesce, in pratica, ad individuare un trapezio, trovando così ED, spigolo del cubo di volume doppio.

La costruzione ha tuttavia violato le «regole del gioco»; essa ricorre a strumenti diversi da quelli concessi nelle costruzioni classiche, che prevedevano l'uso esclusivo di riga e compasso. Questa restrizione, a pensarci bene, è di natura anche filosofica, o addirittura estetica. I Greci concepivano retta e circonferenza quali curve essenziali e perfette (la circonferenza ancora più perfetta della retta essendo una curva finita) e forse ritenevano, a torto, che qualsiasi figura geometrica potesse essere costruita attraverso questi soli strumenti. Le soluzioni alternative, che comportavano scorrimenti, rotazioni, ecc., erano chiamate *neusis*, ovvero soluzioni mediante inclinazione, ed erano viste con minore considerazione.

Concludiamo con una piccola riflessione didattica. Il problema geometrico è insidioso, di solito o è troppo facile o è troppo difficile. Non ne esistono varietà infinite come per gli esercizi algebrici e rappresenta anche un'ottima occasione per fare brutte figure in classe. Però ha un grande vantaggio: può catturare l'interesse dei nostri studenti in modo irreversibile e avvicinarli a quella *scoperta matematica* che in fondo è uno dei principali obiettivi didattici e, più in generale, educativi. (Ri)scoprire il fascino della geometria può essere una scelta saggia.

Claudio Bernardi

Marco Savarese
Liceo Scientifico Statale «A. Righi» – Roma

Riferimenti bibliografici e sitografia

L. Bunt – P. Jones – J. Bedient, *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Zanichelli, 1983

www.savarese.altervista.org