Un altro esempio: la Roulette

Come probabilmente sapete, la roulette è fondamentalmente un disco diviso in 37 settori uguali, numerati da 0 a 36. Puntando su un numero singolo, se questo esce il banco paga trentasei volte la puntata, altrimenti nulla. Il banco statisticamente guadagna 1/37 dei soldi puntati, più o meno il 2,7%, come si può facilmente vedere immaginando che ci siano 37 giocatori che puntino ciascuno la stessa cifra su un diverso numero. Immaginiamo un'ipotetica situazione di gioco: ho un budget di 105 euro, e decido di fare 105 puntate successive da un euro ciascuna, sempre su un numero singolo scelto casualmente. Mi pongo allora questa domanda: qual è la probabilità che io esca dal casinò con più soldi di quando sono entrato? La risposta è assolutamente controintuitiva: è più probabile che io esca con più soldi di quelli con cui ho iniziato. Non credete a tutti quelli che vi dicono che se si gioca abbastanza a lungo si perde tutto: o meglio, è vero, ma 105 giocate non sono abbastanza. Per dimostrarlo, basta risolvere alcune semplici operazioni. Innanzitutto, è facile vedere che basta che io vinca tre volte per arrivare a possedere 108 euro (1 euro puntato · 36 · 3 puntate favorevoli), e quindi essere in vantaggio rispetto all'inizio. I seguenti risultati sono una conseguenza del cosiddetto teorema binomiale. La probabilità che io non vinca nemmeno una volta è $(36/37)^{105}$, pari al 5,63%. La probabilità che io vinca una sola volta è $105 \cdot (1/37) \cdot (36/37)^{104}$, pari al 16,42%. La probabilità che io vinca due volte è $(105 \cdot 104/2) \cdot (1/37)^2 \cdot (36/37)^{103}$, pari al 23,72%. La somma di tutte queste probabilità, arrotondata per eccesso, è il 45,8%; quello che resta, pari al 54,2%, è la probabilità che io vinca almeno tre volte. Persino sulla roulette americana, che aggiunge un secondo zero per assicurare guadagni ancora maggiori al banco, questa strategia farebbe tornare a casa con più soldi di quando si è partiti nel 52,4% dei casi. Il punto è che quella è la risposta giusta alla domanda sbagliata! Per dirla con altre parole, la domanda più naturale da farsi non è quella, ma "con quanti soldi uscirò in media dal casinò?" e la risposta a *questa* domanda è "con 102,16 euro circa", avendone cioè persi 2 euro e 84 (un trentasettesimo dei soldi puntati). Bel paradosso, non c'è che dire… La spiegazione va ricercata nella somma vinta a ogni giocata: se da una parte è vero che si vince più spesso di quanto si perde, nella maggior parte dei casi si vince talmente poco che tornare a casa con un discreto gruzzoletto è un'eventualità così rara che possiamo tranquillamente trascurarla. Dall'altra parte, invece, ci sono delle possibilità non trascurabili di perdere buona parte, se non addirittura tutti, i nostri soldi. Facendo la media, è un po' come se una persona riuscisse ad arrampicarsi per sei o sette volte di fila di un metro per volta, prima di scivolare in giù per dieci metri. Alla fine si scopre più in basso di prima, nonostante fosse salito "quasi sempre". Storicamente si è cercato di ovviare al problema cercando di giungere alla "scommessa perfetta". In questo senso, una dei sistemi più interessanti è quello della martingala. Questa strategia, adottata in origine dagli scommettitori francesi nel XVIII secolo, prevedeva di raddoppiare la propria puntata dopo ogni lancio perso. Questa tecnica, che apparentemente conduce ad una vincita finale certa, è stata in verità la causa di forti perdite da parte di scommettitori. Un'analisi più attenta mostra che la posta da mettere in gioco aumenta esponenzialmente con i lanci perdenti, e ci si convince facilmente del fatto che, per assicurarsi la vittoria, bisognerebbe disporre di una fortuna infinita da poter scommettere! Applicata al gioco della roulette, una situazione tipo potrebbe essere questa: entro con 127 euro. Scelgo una "puntata semplice" (sono quelle rosso/nero, pari/dispari, manque/passe cioè "piccoli/grandi"), e punto un euro. Se vinco, prendo la mia vincita e scappo via. Se perdo, gioco due euro sempre su una puntata semplice. Se stavolta vinco, il mio totale netto è in attivo di un euro: di nuovo, prendo e me ne vado. Continuo così, raddoppiando ogni volta la posta, finché non vinco oppure, dopo la settima giocata, ho perso tutti i soldi. Ma qual è la probabilità di essere così sfortunati? Se non ci fosse lo zero avrei esattamente 1/2 di probabilità di perdere a ogni giocata, quindi la probabilità di perdere sempre sarebbe 1/128. Lo zero favorisce il banco, quindi la probabilità di finire in bolletta cresce: però rimane solo di poco più dello 0,94%, il che significa che in più del 99% dei casi potrò dire ai miei amici "Visto? Sono stato al casinò e ho vinto!".

APPUNTI DI CALCOLO COMBINATORIO

a cura di Lorenzo Testini

Permutazioni semplici (senza ripetizioni)

Una permutazione di un insieme di oggetti è una presentazione ordinata, cioè una sequenza, dei suoi elementi nella quale ogni oggetto viene presentato una ed una sola volta. Per contare quante siano le permutazioni di un insieme con n oggetti, si osservi che il primo elemento della configurazione può essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n-1)$, il terzo in $(n-2)$ e così via sino all'ultimo che potrà essere preso in un solo modo essendo l'ultimo rimasto. Dunque, indicando con P_n il numero delle possibili permutazioni, si ottiene che esse sono esattamente $n!$ (n fattoriale):

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Ad esempio le permutazioni degli elementi dell'insieme {a,b,c} sono 3! = 6 cioè: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Permutazioni con ripetizioni

In alcuni casi un insieme può contenere elementi che si ripetono. In questo caso alcune permutazioni di tali elementi saranno uguali tra loro. Indicando con n_1, n_2 fino ad n_n il numero di volte che si ripetono rispettivamente gli elementi 1, 2 ed n, le permutazioni con ripetizione divengono:

$$P_n^{(n_1, n_2 \dots)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \dots}$$

Esempio, tutti i possibili anagrammi della parola TETTO (anche quelli senza senso) sono $P_5^{(3)}$ che si legge: "permutazioni di 5 elementi di cui 3 ripetuti". Si ha: $P_5^{(3)} = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 20$. La formula, ovviamente, vale anche per qualsiasi permutazione, anche senza ripetizioni di elementi, in quanto se assumiamo 1, 2 ed n uguali ad 1 (cioè gli elementi si ripetono una sola volta), otteniamo esattamente la formula delle permutazioni semplici, infatti: $P_n^{(1,1 \dots 1)} = n!$

Disposizioni semplici (senza ripetizioni)

Una **disposizione semplice** di lunghezza k, di n elementi di un insieme S, con $k < n$, è una presentazione ordinata di k elementi di S nella quale non si possono avere ripetizioni di uno stesso oggetto. Per avere il numero di queste configurazioni si considera che il primo componente di una tale sequenza può essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n - 1)$ e così via sino al k - *esimo* che può essere scelto in $(n - k + 1)$ modi diversi. Pertanto il numero $D_{n,k}$ di disposizioni semplici di k oggetti estratti da un insieme di n oggetti è dato dal prodotto:

$$D_{n,k} = P_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ad esempio le disposizioni semplici di lunghezza 2 degli elementi dell'insieme {1,2,3,4,5} sono 20 cioè: 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

Si osserva che le permutazioni sono casi particolari delle disposizioni semplici: le permutazioni di un insieme di n oggetti sono le disposizioni semplici di tali oggetti di lunghezza n. In effetti per il loro numero:

$$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Disposizioni con ripetizioni

Una presentazione ordinata di elementi di un insieme nella quale si possono avere ripetizioni di uno stesso elemento si dice **disposizione con ripetizioni**. Cerchiamo il numero delle possibili sequenze di k oggetti che riproducano gli elementi di un insieme di n oggetti ognuno dei quali può essere preso più volte. Si hanno n possibilità per scegliere il primo componente, n per il secondo ed altrettante per il terzo e così via sino al k - *esimo* che completa la configurazione. Il numero cercato è pertanto:

$$D'_{n,k} = n^k$$

Ad esempio le disposizioni con ripetizione di lunghezza 2 degli elementi di {1,2,3,4,5} sono $5^2 = 25$ cioè: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 55. Oppure, quante colonne del totocalcio possiamo compilare con i simboli 1, 2, X? Semplice: 3^{13}

Combinazioni semplici

Le combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n, tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per almeno un elemento contenuto:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Ad esempio consideriamo 5 lettere A, B, C, D, E. Tutti i gruppi di 3 lettere, che si differenziano fra di loro solo per gli elementi contenuti e non per l'ordine sono combinazioni (semplici) di 5 elementi di classe 3 e si indicano con $C_{5,3}$ oppure con il simbolo $\binom{5}{3}$ che si legge "cinque su tre".

La formula delle combinazioni semplici può assumere anche un'altra forma. Utilizzando quella delle disposizioni semplici espressa come rapporto di due fattoriali abbiamo:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

La formula ottenuta consente di calcolare le combinazioni mediante la funzione fattoriale ed è chiamata *dei tre fattoriali*.

Il calcolo combinatorio nel gioco del Lotto

Estratto Secco
É il caso più semplice: giocando un solo numero sui 90 possibili abbiamo una probabilità di 5/90 = 1/18 che la nostra sia una giocata favorevole. L'impostazione classica definisce infatti la probabilità di un evento come "il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento stesso e il numero di tutti i casi comunque possibili". Nello specifico del gioco del Lotto i casi favorevoli consistono nei 5 numeri estratti, mentre i casi possibili sono tutti i 90 numeri contenuti nell'urna.

Ambo
Come abbiamo visto la conoscenza del numero di k combinazioni che si formano con un insieme di n numeri è possibile grazie al calcolo combinatorio. La frazione necessaria allo scopo l'abbiamo già impostata ed è data semplicemente da $C_{n,k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$

Nel caso dell'ambo, per esempio, avremo (90·89)/(2·1) = 4005 combinazioni diverse possibili. La probabilità che giocando due numeri essa si riveli una giocata vincente è quindi di (1/18)· (4/89) = 1/400,5 equivale cioè alla probabilità di azzeccare il primo numero moltiplicato per quella di azzeccare il secondo fra i quattro numeri rimanenti. Con lo stesso ragionamento si ottengono le seguenti probabilità:

Terno
le combinazioni possibili sono $C_{90,3}$ = (90·89·88)/(3·2·1) = 117.480;
la probabilità di fare terno è p = (5/90) · (4/89) · (3/88) = (5·4·3) / (90·89·88) = 1/11.748;

Quaterna
le combinazioni possibili sono $C_{90,4}$ = (90·89·88·87)/(4·3·2·1) = 2.555.190;
la prob. della quaterna è p = (5/90) · (4/89) · (3/88) · (2/87) = (5·4·3·2) / (90·89·88·87) = 1/511.038;

Cinquina
le combinazioni possibili sono $C_{90,5}$ = (90·89·88·87·86·85)/(5·4·3·2·1) = 43.949.268;
la probabilità della cinquina è il reciproco delle combinazioni, cioè p = 1/ $C_{90,5}$ = 1/43.949.268;

6 al Superenalotto
anche qui la probabilità è il reciproco del numero di combinazioni possibili, p = 1/ $C_{90,6}$ = (6·5·4·3·2) / (90·89·88·87·86·85) = 1/622.614.630

Si noti come il lotto sia un gioco iniquo, in quanto a fronte delle probabilità sopra calcolate lo Stato restituisce ben poco:
per l'*estratto secco* 11,232 volte la cifra giocata,
per l'*ambo*, 250 volte,
per il *terno* 4.500 volte,
per la *quaterna* 120.000 volte,
per la *cinquina* 6.000.000 di volte (a tutte va aggiunta una ulteriore trattenuta del 6%).

Il *superenalotto* invece è un gioco a montepremi, se si giocano tutte le combinazioni possibili (circa 312 milioni di euro) si è sicuri di vincere, ma chi ci garantisce di essere gli unici?