I vari tipi di coniche si possono individuare in base al loro comportamento rispetto alla retta impropria; infatti, passando in coordinate omogenee, si studiano le intersezioni con la retta impropria:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \end{cases}$$

cioè

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

da cui, ponendo $t = x_1/x_2$, si ha:

$$a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22} = 0$$

Consideriamo il discriminante $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ di questa equazione di II grado, se

- $\Delta > 0$ allora l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte e quindi la conica è una iperbole perché la retta impropria è secante l'iperbole;
- $\Delta = 0$ allora l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti e quindi la conica è una parabola perché la retta impropria è tangente alla parabola;
- $\Delta < 0$ allora l'equazione ammette due soluzioni complesse coniugate e quindi la conica è una ellisse perché la retta impropria è esterna all'ellisse.

Coniche degeneri

Introduciamo infine il concetto di conica degenere utilizzando dapprima un approccio geometrico e poi un riscontro analitico. Come è noto le coniche prendono questo nome perché possono essere pensate come sezioni di un cono di rotazione con un piano non passante per il vertice; se ora prendiamo in considerazione un piano passante per il vertice del cono notiamo che il piano parallelo a quello che individua, per esempio, una parabola è tangente al cono, cioè lo interseca in due rette coincidenti. Possiamo allora definire una conica degenere come l'insieme di due rette. La verifica analitica si ottiene risolvendo l'equazione della conica in una delle due variabili: se il discriminante risulta un quadrato perfetto o nullo allora la conica è degenere.

Esempio

Sia data l'equazione

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 3y - 2 = 0$$

la ordiniamo, per esempio, rispetto a *x:*

$$x^2 + x(3y+1) + 2y^2 + 3y - 2 = 0$$

poi la risolviamo:

$$x_{1;2} = \frac{-(3y+1) \mp \sqrt{(3y+1)^2 - 4(2y^2+3y-2)}}{2} = \frac{-(3y+1) \mp \sqrt{(y-3)^2}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -2y+1 \\ -y-2 \end{array} \right.$$

abbiamo ottenuto le due rette costituenti la conica degenere assegnata:

$$(x+2y-1)(x+y+2) = 0$$

Marco Savarese

Classificazione delle coniche mediante la retta impropria

Esempio 2.3

Sia data l'iperbole

$$I: 4x^2 - y^2 = 1$$

dopo averla trasformata in forma omogenea studiamo le intersezioni con la retta impropria

$$I \cap r_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 4x_1^2 - x_2^2 = x_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 4x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

la retta impropria incontra l'iperbole in due punti reali e distinti (0; 1; 2) e (0; –1; – 2), cioè la retta impropria è *secante* l'iperbole.

Classificazione di una conica in forma generica

Vediamo ora cosa succede alle equazioni di una conica se operiamo una traslazione e poi una rotazione.

Esempio 2.4

Sia data l'ellisse

$$E: x^2 + 4y^2 = 4$$

operiamo un cambiamento di coordinate mediante la traslazione

$$t: \begin{cases} x = X + 4 \\ y = Y + 3 \end{cases}$$

nelle nuove coordinate l'ellisse diventa:

$$X^2 + 4Y^2 + 8X + 24Y + 48 = 20$$

notiamo che compaiono termini lineari. Effettuiamo ora una rotazione di 45°

$$\rho: \begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

sostituendo e sommando i termini simili si ottiene:

$$5x'^2 + 5y'^2 - 6x'y' - 16\sqrt{2}x' + 32\sqrt{2}y' + 96 = 0$$

notiamo che è comparso un termine misto, la rototraslazione ha trasformato l'equazione canonica della conica in una equazione algebrica di 2° grado. A questo punto viene naturale dare la definizione generale di conica come il luogo geometrico dei punti del piano (x, y) le cui coordinate soddisfano una equazione del tipo:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

2. Classificazione delle coniche mediante la retta impropria

Coniche in forma canonica

In questo capitolo vogliamo vedere come sia possibile classificare le coniche mediante il concetto di retta impropria. Partiamo da coniche le cui equazioni siano in forma canonica e cerchiamo le intersezioni con la retta impropria. Procediamo attraverso esempi esplicativi, senza alcuna ambizione di rigore formale.

Esempio 2.1

Sia data la parabola

$$P : y = x^2 - 3x + 1$$

la trasformiamo in forma omogenea

$$P : x_0 x_2 = x_1^2 - 3x_0 x_1 + x_0^2$$

e studiamo le intersezioni con la retta impropria

$$P \cap r_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 = 0 \end{cases}$$

abbiamo trovato come soluzione il punto improprio (0; 0; 1) contato due volte, quindi la parabola è secata dalla retta impropria in due punti reali coincidenti, ovvero la retta impropria è *tangente* alla parabola.

Esempio 2.2

Sia data l'ellisse

$$E : x^2 + 4y^2 - 3 = 0$$

dopo averla trasformata in forma omogenea studiamo le intersezioni con la retta impropria

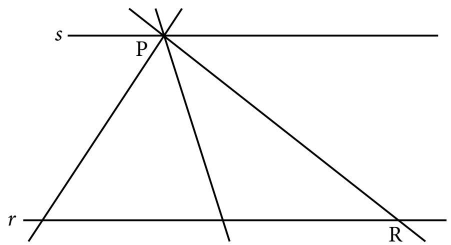
$$E \cap r_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + 4x_2^2 = 0 \end{cases}$$

non abbiamo trovato alcuna soluzione reale, l'ellisse incontra la retta impropria in due punti complessi coniugati (0; 2*i*; 1) e (0; –2*i*, 1), cioè la retta impropria è *esterna* all'ellisse.

1. Punto improprio. Coordinate omogenee. Retta impropria

Consideriamo una retta che ne interseca un'altra e facciamola ruotare lentamente in modo che diventi parallela alla prima; l'intuizione geometrica ci dice che il punto di intersezione delle due retta si allontana all'infinito. Si potrebbe dire, in modo impreciso ma efficace, che le due rette si intersecano in un "punto all'infinito". Ora, è essenziale dare a questo concetto vago un significato più preciso in modo da poter trattare i punti all'infinito o, come più frequentemente si chiamano, i punti "impropri", esattamente come fossero punti ordinari del piano e dello spazio. In altre parole, vogliamo che tutti i postulati relativi al comportamento dei concetti primitivi di punto, retta e piano continuino a valere anche quando questi elementi geometrici siano impropri.

A questo scopo consideriamo nel piano una retta *r* e un punto *P* esterno ad essa e chiediamoci se esista una corrispondenza biunivoca tra le rette passanti per P e i punti della retta *r*.



Notiamo che ad ogni punto R della retta *r* corrisponde una sola retta del fascio di centro P ma il contrario è falso: esiste una retta passante per P a cui non corrisponde nessun punto sulla retta R e questa retta è proprio la parallela a *r* passante per P. Affinché si abbia una corrispondenza biunivoca senza eccezioni è necessario aggiungere ai cosiddetti punti propri di una retta un punto improprio o all'infinito e pensare che rette parallele come *r* e *s* abbiano lo stesso punto improprio come intersezione. Si considera infatti questo punto come appartenente a tutte le rette parallele alla retta data e a nessun'altra. Come conseguenza di questa nuova convenzione, due rette del piano si intersecano *sempre* in un punto; se le rette non sono parallele si intersecano in un punto proprio, mentre se sono parallele si intersecano nel punto improprio o punto all'infinito, comune ad entrambe. Ma allora perché non aggiungerne due, uno da una parte e uno dall'altra? Il motivo di questa scelta è che, se così facessimo, allora per questi due punti impropri, che abbiamo detto essere in comune con ogni retta parallela, passerebbero infinite rette e ciò andrebbe contro il postulato che per due punti passa una e una sola retta. Questo postulato deve essere assolutamente conservato perché è quello che definisce implicitamente le proprietà della retta e non ne possiamo fare certamente a meno.

Se ripartiamo l'insieme di rette di un piano in classi di rette parallele, allora ogni classe individua una direzione e ad una direzione è associato un punto improprio. Una classe di rette parallele individua così un punto improprio e, estendendo il concetto di incidenza tra rette, possiamo dire che tutte le rette appartenenti alla stessa classe si intersecano in un punto improprio. I punti impropri sono allora tanti quante sono le direzioni sul piano.

I punti impropri però non possono essere rappresentati nel piano e quindi non possono essere indicati con le usuali coordinate cartesiane. É pertanto necessario introdurre un nuovo sistema di coordinate che chiameremo *coordinate omogenee*; a tale scopo partiamo da un punto proprio P di coordinate cartesiane $(x; y)$ e introduciamo una terna di numeri reali $(x_0; x_1; x_2)$ non tutti nulli, tale che:

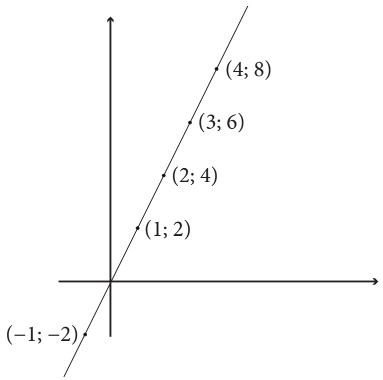
$$x = \frac{x_1}{x_0}; \quad y = \frac{x_2}{x_0}$$

Notiamo subito che le coordinate omogenee di P sono definite a meno di una costante di proporzionalità: le terne $(x_0; x_1; x_2)$ e $(kx_0; kx_1; kx_2)$ infatti individuano lo stesso punto.

Il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate omogee è immediato: dato il punto (1; 2) il corrispondente punto in coordinate omogenee è semplicemente (1; 1; 2) o qualcosa del tipo $(k; k; 2k)$. Viceversa, dato un punto in coordinate omogenee è sempre possibile passare in coordinate cartesiane? La risposta è negativa perché le formule introdotte per collegare le coordinate omogenee a quelle cartesiane non sono applicabili nel caso $x_0 = 0$ e quindi i punti del tipo $(0; x_1; x_2)$ non si possono rappresentare nel piano cartesiano e non sono pertanto punti propri. Per intuire dove si "trovano" questi punti consideriamo il seguente esempio.

Esempio 1.1

Prendiamo il punto $(c; 1; 2)$ e assegniamo a c valori sempre più vicini a zero. Con $c = 1$ abbiamo visto si ottiene il punto di coordinate (1; 2); con $c = ½$ si ha (2; 4); con $c = ⅓ \Rightarrow (3; 6)$; con $c = ¼ \Rightarrow (4; 8)$... Tutti questi punti appartengono alla retta $y = 2x$ e attribuendo a c valori che si avvicinano a zero essi si allontanano sempre più dall'origine degli assi. Possiamo concludere che il punto (0; 1; 2) può essere immaginato come un "punto" di questa retta posto a distanza infinita dall'origine; questo punto non è altro che il punto improprio che abbiamo precedentemente definito. Analogamente il punto improprio (0; 2; 3) si trova in fondo alla retta $y = 3x/2$. Riassumendo: i punti aventi come coordinate omogenee terne del tipo $(x_0; x_1; x_2)$ con $x_0 \neq 0$ sono punti propri e di essi si può dare una rappresentazione in coordinate cartesiane; i punti aventi come coordinate omogenee terne del tipo $(x_0; x_1; x_2)$ con $x_0 = 0$ sono punti impropri o all'infinito e di essi ovviamente non è possibile dare alcuna rappresentazione in coordinate cartesiane; infine alla terna (0; 0; 0) non si fa corrispondere alcun punto, nè proprio nè improprio.



Esempio 1.2

Consideriamo le rette di equazione $2x - y + 1 = 0$ e $2x - y - 3 = 0$. Si vede subito che queste due rette sono parallele e quindi nel piano cartesiano non hanno intersezione. Se però passiamo in coordinate omogenee e cerchiamo di risolvere il sistema si ha:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow (0; k; 2k)$$

Abbiamo ottenuto come soluzione il punto impropio P_∞ (0; 1; 2), definito a meno di una costante di proporzionalità, punto comune alle due rette parallele.

All'insieme di tutti e soli i punti impropri del piano si dà il nome di *retta impropria* (a cui corrisponde l'equazione $x_0 = 0$) mentre l'unione dei punti impropri e dei punti propri prende il nome di *piano proiettivo*. In linea di principio non sappiamo nulla della retta impropria, non sappiamo che tipo di andamento abbia, se vada dritta o meno, l'unica cosa che possiamo dire di essa la ricaviamo dalla definizione: l'insieme di tutti e soli i punti impropri. Anche qui abbiamo il solito problema: perché una sola retta impropria? la risposta è sempre la stessa: per conservare il postulato che per due punti passa una sola retta. Infatti, prendiamo due punti impropri qualsiasi: l'unica retta che ci passa non può essere una retta propria (perché una retta propria contiene un solo punto improprio); questa retta non può avere punti propri (perché la retta che passa per un punto proprio e uno improprio è una retta propria); infine contiene tutti i punti impropri perché ha un punto in comune con tutte le rette proprie.

Qualche esercizio

1. data la retta $3x + 2y - 1 = 0$, la si esprima in coordinate omogenee;
2. data la retta $2x_1 + 5x_2 - 3x_0 = 0$, la si esprima in coordinate cartesiane;
3. data la retta $y = -3x + 5$, si determini il suo punto all'infinito;
4. si scriva l'equazione del fascio improprio di rette passanti per $P_\infty(0; 1; 2)$;
5. date le rette parallele $x - 2y + 2 = 0$ e $2x - 4y + 3 = 0$, si calcolino le coordinate del loro punto di intersezione.