4. I versi di Tartaglia

Vogliamo concludere citando i famosi versi con i quali Tartaglia confida a Cardano la sua formula risolutiva facendosi giurare di non renderla pubblica.

Quando che l cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Travan dui altri differenti in esso.
Da poi terrai questo per consueto
Ch 'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.
In el secondo de codesti atti
Quando che 'l cubo restasse lui solo[6]
Tu osserverai quest'altri contratti,
Del numero farai due tal part' àl volo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo
Delle qual poi, per comun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
E tal somma sarà il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti[7]
Se solve col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questo trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecentè, quatro e trenta
Con fondamenti ben sald'è gagliardi
Nella città dal mar'intorno centa.

Traduciamo il primo caso: quando hai l'equazione $x^3+px=q$ devi trovare due numeri la cui differenza sia uguale al termine noto (q) e il loro prodotto al cubo della terza parte del numero (p) delle cose. Trovati questi numeri, l'incognita cercata sarà uguale alla differenza (al maggiore dei due bisogna togliere il minore) delle loro radici cubiche. In altre parole, come abbiamo visto, data l'equazione $x^3+px=q$ bisogna trovare due numeri u e v tali che: $\begin{cases} uv = (p/3)^3 \\ u-v=q \end{cases}$ si ha allora, conclude Tartaglia: $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$

Riferimenti bibliografici

[1] S. Maracchia - *Storia dell'algebra* - Liguori, 2005
[2] C. B. Boyer - *Storia della matematica* - ISEDI, 1976
[3] S. Gabelli - *Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois* - Springer, 2008

[6] questo è il caso $x^3=px+q$
[7] questo è il caso $x^3+q=px$

LA SOLUZIONE DELLA EQUAZIONE DI TERZO GRADO E LA NASCITA DEI NUMERI IMMAGINARI

M. SAVARESE

1. La formula di Scipione dal Ferro

Consideriamo una generica equazione di terzo grado:

$$az^3+bz^2+cz+d=0 \tag{1.1}$$

con la sostituzione

$$z=x-\frac{b}{3a} \tag{1.2}$$

e una successiva divisione per a si ottiene una nuova equazione di terzo grado in cui manca il termine di secondo grado e il coefficiente di x^3 è uguale a 1, del tipo:

$$x^3+px=q \tag{1.3}$$

con:

$$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2};\ \ q=\frac{9abc-27a^2d-2b^3}{27a^3}$$

questa equazione ha una sola[1] soluzione reale se $p>0$.

Per trovarla sostituiamo al posto di x l'espressione:

$$x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v} \tag{1.4}$$

otteniamo:

$$u-v-3\sqrt[3]{uv}\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)+p\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)=q$$

cioè:

$$u-v-\left(3\sqrt[3]{uv}-p\right)\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)=q \tag{1.5}$$

Siccome abbiamo sostituito ad una incognita due altre indipendenti fra loro, esse si possono condizionare[2] in modo tale che il coefficiente di $(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v})$ sia zero, cioè:

$$3\sqrt[3]{uv}-p=0$$

vale a dire:

$$uv=\frac{p^3}{27}$$

[1] infatti, consideriamo la funzione $y=x^3+px-q$, la sua derivata è: $y'=3x^2+p$ che è sempre positiva se $p>0$, facendo i limiti a $\pm\infty$ possiamo concludere che essa interseca l'asse delle ascisse una sola volta.

[2] Supponiamo per esempio di avere il sistema $\begin{cases} 3a+b=1 \\ a-b=3 \end{cases}$ che è determinato, e ammette come unica soluzione $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

Se sostituiamo all'incognita a due altre indipendenti fra loro, per esempio $a=x+y$ il sistema diventa $\begin{cases} 3x+3y+b=1 \\ x+y-b=3 \end{cases}$ che è indeterminato perché contiene tre incognite ma le equazioni sono solo due. Per renderlo determinato dobbiamo inserire una ulteriore condizione, per esempio l'equazione $2x-y=0$; a questo punto il sistema $\begin{cases} 3x+3y+b=1 \\ x+y-b=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ torna determinato, con soluzione: $\begin{cases} y=2x \\ 9x+b=1 \\ 3x-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/3 \\ y=2/3 \\ b=-2 \end{cases}$

l'equazione 1.5 si trasforma nel sistema:

$$\begin{cases} uv = {}^{p^3}/_{27} \\ u - v = q \end{cases}$$

che risolto porta a:

$$u = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2};$$

sostituendo u e v nella 1.4 si ottiene la soluzione dell'equazione di partenza:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} \tag{1.6}$$

Il primo a trovare tale formula fu Scipione dal Ferro[3] (1465—1526), che così la enuncia nel linguaggio dell'epoca:

> «*Il Capitolo* [tipo di equazione] *di cose* [ax] *e cubo uguale a numero. Quando le cose e li cubi si eguagliano al numero* [$ax + bx^3 = c$] *ridurai la equazione a un cubo partendo* [dividendo] *per la quantità* [b] *delli cubi* [$x^3 + px = q$], *poi cuba la terza parte delle cose* [$(p/3)^3$], *poi quadra la metà dil numero* [$(q/2)^2$] *e questo suma col detto cubato* [$q^2/4 + p^3/27$], *et la radice di deta suma più la metà del numero fa un binomio* [$\sqrt{q^2/4 + p^3/27} + q/2$] *et la radice cuba di tal binomio, men la radice cuba del suo residuo* [differenza nel binomio] *val la cosa*».

Come si vede si tratta proprio della descrizione della formula risolutiva 1.6.

2. I numeri immaginari

Cerchiamo ora di applicare la regola all'equazione

$$x^3 = 15x + 4 \tag{2.1}$$

in questo caso particolare p è negativo e l'equazione ammette tre soluzioni reali. La formula risolutiva resta comunque valida e permette di trovare una delle tre soluzioni; sostituendo i valori si ottiene:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} \tag{2.2}$$

Ora, si sapeva che non esisteva nessuna radice quadrata di un numero negativo, tuttavia la soluzione c'è ed anche semplice, è 4 infatti $15 \times 4 + 4$ fa 64 che è il cubo di 4. Cardano (1501—1566) si arrovellò molto su questo problema ma non riuscì a capire come potesse avere senso la regola in una situazione del genere. Egli aveva armeggiato con le radici quadrate di numeri negativi in un'altra occasione quando si era posto il problema di dividere 10 in due parti tali che il loro prodotto fosse 40. Il sistema, come ogni studente sa, porta all'equazione di secondo grado $x^2 - 10x + 40 = 0$ con soluzioni $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Cardano chiamava "sofistiche" queste radici quadrate di numeri negativi e concludeva che il suo risultato in questo caso era "tanto sottile quanto inutile". Matematici posteriori avrebbero dimostrato come tali manipolazioni fossero sì sottili, ma tutt'altro che inutili.

[3]Scipione scoprì una soluzione algebrica dell'equazione di terzo grado nel 1505 ma la tenne nascosta, riservandola solo per suoi allievi. Mantenendo segreta la formula egli stupiva regolarmente il pubblico ed i colleghi nelle sfide matematiche a colpi di indovinelli che si tenevano in quel periodo sotto il portico della Chiesa di Santa Maria dei Servi a Bologna. Queste sfide matematiche ricoprivano di credito e prestigio i vincitori, e soprattutto permettevano loro di godere della protezione dei potenti nobili di allora. Grazie a questo dal 1496 al 1510 lo stipendio di Scipione del Ferro passò da 25 a 150 lire. Prima di morire rivelò la soluzione ad uno studente, Antonio Maria Fior, detto Floridus in latino, un mediocre matematico. Venuto a sapere dell'esistenza di una soluzione, Nicolò Fontana (1499 - 1557) detto Tartaglia fu stimolato a ricavarla da sé, non è noto se autonomamente o grazie a informazioni pervenutegli e nel 1541 era in possesso del metodo generale. In seguito si organizzò una gara matematica tra Fior e Tartaglia, entrambi i contendenti proponevano problemi all'avversario da risolvere in un tempo prestabilito. Se Tartaglia fu in grado di risolvere tutti i problemi postigli da Fior, quest'ultimo non ne risolse neppure uno. Il motivo dipende dal fatto che al tempo non venivano presi in considerazione i numeri negativi ed esistevano tanti tipi di equazioni quante erano le combinazioni di coefficienti positivi o negativi, quindi mentre Fior disponeva di un metodo per la soluzione di un caso particolare dell'equazione di terzo grado, Tartaglia possedeva la soluzione per ogni caso. Gerolamo Cardano, venuto a conoscenza della sfida, invitò Tartaglia, con la vaga promessa di fargli incontrare un mecenate, a confidargli la soluzione. A tal scopo Tartaglia compose una poesia che riportiamo nella terza parte. Dopo la pubblicazione dell'opera Ars Magna da parte di Cardano, opera che per prima riporta il metodo con i dettagli completi e pedanti nello stile dell'algebra del tempo ma trascurando di citare la fonte, nacque una accesa e gretta controversia tra i due. Grazie ad alcune carte che erano in possesso del genero di dal Ferro, fu possibile riconoscere il merito originale, anche se limitato ad un caso particolare. (da Wikipedia)

Al tempo di Cardano i numeri irrazionali venivano ormai ammessi, anche se non avevano un solido fondamento, in quanto potevano facilmente venire approssimati da numeri razionali. I numeri negativi sollevavano maggiori difficoltà, poiché non potevano facilmente venire approssimati da numeri positivi, ma la nozione di senso (o di direzione su una linea) li rendeva plausibili. Cardano li usò, pur chiamandoli "numeri ficti". Se un algebrista voleva negare l'esistenza di numeri irrazionali o negativi, poteva semplicemente dire, come avevano fatto gli antichi greci, che le equazioni $x^2 = 2$ e $x + 2 = 0$ non si potevano risolvere. Non c'era alcun bisogno di radici quadrate di numeri negativi. Con la soluzione dell'equazione di terzo grado, però, la situazione cambiò radicalmente. Ogniqualvolta le tre radici di una equazione di terzo grado erano reali e diverse da zero, la formula 1.6 porta inevitabilmente a radici quadrate di numeri negativi. Si sapeva che il risultato finale doveva essere un numero reale, ma questo non poteva essere raggiunto senza una qualche comprensione dei numeri immaginari. Il numero immaginario doveva ora essere preso in considerazione.

A questo punto un altro importante algebrista italiano, Raffaele Bombelli (1526—1573) ebbe quella che egli chiamò "un'idea assurda". Abbiamo visto che la soluzione di $x^3 = 15x + 4$ mediante la formula 1.6 porta a $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ mentre si sa, per sostituzione diretta, che una soluzione è 4 e le altre due sono negative[4]. Bombelli ebbe la felice idea che gli stessi radicali potessero essere messi in relazione fra loro allo stesso modo in cui erano correlati tra loro i radicandi; ossia, come diremmo oggi, che erano numeri complessi coniugati che portavano al numero reale 4. É ovvio, infatti, che se la somma delle parti reali è 4, allora la parte reale di ciascuno è 2; e se un numero nella forma $2 + b\sqrt{-1}$ deve essere una radice cubica di $2 + 11\sqrt{-1}$ allora si può facilmente dimostrare[5] che b deve essere 1. Quindi $x = 2 + 1\sqrt{-1} + 2 - 1\sqrt{-1}$, ossia 4.

Con il suo ingegnoso ragionamento Bombelli aveva dimostrato il ruolo importante che i numeri complessi coniugati avrebbero avuto in futuro; ma per il momento la sua osservazione non fu di alcun aiuto nel lavoro effettivo di soluzioni di equazioni di terzo grado, in quanto Bombelli aveva bisogno di sapere preliminarmente quale fosse una delle radici. In tal caso l'equazione era già risolta, e non c'era bisogno di nessuna formula; senza tale conoscenza preliminare, il metodo di Bombelli era inefficace. Qualsiasi tentativo per trovare algebricamente le radici cubiche dei numeri immaginari che compaiono nella formula portava proprio a quella stessa equazione di terzo grado la cui soluzione aveva introdotto per la prima volta tali radici cubiche, cosiché si era di nuovo al punto di partenza. Poiché ci si veniva a trovare in questa via senza uscita ogniqualvolta tutte e tre le radici erano reali, questo caso venne chiamato il "caso irriducibile". La formula fornisce una espressione per l'incognita, ma la forma in cui viene presentata la rende inutile allo scopo. (dal Boyer [2])

3. Cenni sulle equazioni di grado superiore

Fu un discepolo di Cardano, Ludovico Ferrari (1522-1565) a dimostrare per primo che l'equazione generale di quarto grado può essere risolta per mezzo di radicali quadratici e cubici; le sue formule furono pubblicate per la prima volta da Cardano nella sua *Ars Magna*. Successivamente molti matematici cercarono di trovare formule risolutive per le equazioni polinomiali di grado superiore: tra questi Eulero, Lagrange e lo stesso Gauss. I loro tentativi però ebbero successo solo per equazioni particolari, per esempio Gauss, nel suo trattato *Disquisitiones Arithmeticae*, mostrò che tutte le equazioni del tipo $X^n - 1 = 0$ sono risolubili per radicali.

Il primo a mostrare che non sarebbe stato possibile trovare formule risolutive per le soluzioni dell'equazione di quinto grado fu il matematico viterbese Paolo Ruffini (1765-1822) che pubblico varie dimostrazioni, tutte incomplete, di questo fondamentale risultato. In seguito Niels Henrik Abel (1802-1829), che probabilmente non conosceva i lavori di Ruffini, produsse altre dimostrazioni di questo teorema che furono considerate corrette dai contemporanei, ma ad un successivo riesame si rivelarono anch'esse incomplete. Fu Evariste Galois (1811-1832) morto in duello a venti anni, il primo a formulare i criteri per stabilire in modo inequivocabile se una particolare equazione a coefficienti numerici fosse o meno risolubile. Il suo lavoro, pubblicato postumo da Liouville nel 1846, rese definitivamente chiaro che non tutte le equazioni polinomiali di grado maggiore di quattro sono risolubili per radicali.

[4]per trovale basta fattorizzare: $x^3 - 15x - 4 = (x-4)\left(x^2 + 4x + 1\right) = (x-4)\left(x + 2 + \sqrt{3}\right)\left(x + 2 - \sqrt{3}\right)$

[5]$\left(2 + b\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \Rightarrow 8 - b^3\sqrt{-1} + 12b\sqrt{-1} - 6b^2 = 2 + 11\sqrt{-1} \Rightarrow 8 - 6b^2 + \left(12b - b^3\right)\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$