EUCLIDE

ELEMENTI

LIBRO I

A CURA DEL PROF. M. SAVARESE

DEFINIZIONI (*ὅροι*[1])

I. Punto è ciò che non ha parti (*Σημεῖόν ἐστὶν οὗ μὲρος οὐθέν*).
II. Linea è lunghezza senza larghezza (*Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές*).
III. Estremi di una linea sono punti (*Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖ*).
IV. Linea retta[2] è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti (*Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστὶν, ἣτις ἐξ ἲσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*).
V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
VI. Estremi di una superficie sono linee.
VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle sue rette.
VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.
IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.
X. Quando una retta innalzata su un'altra forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta innalzatasi si chiama perpendicolare a quella a cui è innalzata.
XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.
XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.
XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.
XIV. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.
XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.
XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.
XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio a metà.
XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.
XIX. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.
XX. Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.
XXI. Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, e acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.
XXII. Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che e insieme equilatera è ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera ne ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi.
XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrino da nessuna delle due parti.

POSTULATI (*αἰτήματα*)

I. Risulti postulato: che si possa condurre una retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto (*'Ηιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν*).
II. E che un segmento[3] si possa prolungare continuamente in linea retta[4] (*Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν*) .
III. E che si possa tracciare una circonferenza con qualsiasi centro e qualsiasi raggio (*Καὶ παντὶ κέντπω καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι*).
IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro (*Καί πάσαν τάς ὀρθὰς γωνίας ἲσας ἀλλήλαις εἶναι).*
V. E che, se una retta, intersecandone altre due, forma angoli coniugati interni[5] la cui somma è minore di due retti, le due rette, prolungate illimitatamente, si incontreranno da quella parte in cui la somma è minore di due retti (*Καὶ ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντός καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῆ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἅ μέρη αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες*).

NOZIONI COMUNI (*κοιναὶ ἒννοιαι*)

I. Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali fra loro.
II. E se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme sono uguali.
III. E se da cose uguali si tolgono cose uguali, i resti sono uguali.
IV. E se a cose uguali si aggiungono cose disuguali, le somme sono disuguali[6].
V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.
VI. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro.
VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
VIII. E il tutto è maggiore della parte.

---

[1] Sarebbe meglio tradurre con termini o concetti. Le definizioni non erano intese per i Greci nel senso logico odierno. Euclide nelle prime definizioni tenta di descrivere cosa sia un punto come se questo ente geometrico esistesse davvero in natura.
[2] Notiamo che questa definizione risulta alquanto oscura (si veda: E. Giusti - *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici* – Bollati Boringhieri, 1999 – pag. 94).

[3] In originale: retta terminata, noi useremo sempre segmento.
[4] I primi due postulati affermano l'esistenza di una retta contenente due punti. L'unicità di questa retta non viene esplicitamente postulata e costituisce una assunzione che Euclide adopera nella proposizione 4 (primo criterio di congruenza), e che nei manoscritti e nelle edizioni successive figura generalmente aggiunta fra le nozioni comuni nella forma "due rette non possono racchiudere uno spazio".
[5] In originale: angoli interni da una stessa parte.
[6] La IV, V, VI nozione comune sono apocrife.

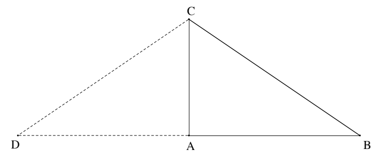
quadrati BDEC, GB e HC sono costruiti rispettivamente sui lati BC, BA e AC. Dunque, il quadrato costruito sul lato BC è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui lati BA e AC.
Dunque, nei triangoli rettangoli ... C.D.D.

Applica: I, 4, 14, 31, 41, 46.
È applicata in: I, 48.

PROPOSIZIONE 48. (INVERSO DEL TEOREMA DI PITAGORA)

Se in un triangolo il quadrato costruito su uno dei lati è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due, l'angolo che è compreso tra questi ultimi è retto.

Nel triangolo ABC il quadrato costruito sul lato BC sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui lati BA e AC. Dico che l'angolo BAC è retto.



Infatti si conduca per A la perpendicolare AD al lato AC (prop. 11), si ponga AD uguale a BA e si congiunga AC. Poiché DA è uguale ad AB anche il quadrato costruito su DA è uguale al quadrato costruito su AB. Si aggiunga ad entrambi il quadrato costruito su AC. In questo modo la somma dei quadrati costruiti su DA e AC sarà equivalente a quella dei quadrati costruiti su BA e AC (noz. com. II). Ma anche il quadrato costruito su DC è equivalente alla somma di quelli costruiti su D e AC perché l'angolo DAC è retto (prop. 47); e il quadrato costruito su BC si è supposto equivalente alla somma di quelli costruiti su BA e AC; quindi il quadrato costruito su DC è equivalente a quello costruito su BC (noz. com. I); perciò anche il lato DC è uguale a BC. Ora, poiché DA è uguale ad AB e AC è in comune i due lati DA e AC sono uguali a BA e AC, l'altro lato DC è uguale a BC quindi l'angolo DAC è uguale all'angolo BAC (prop. 8). Ma DAC è retto, perciò anche BAC è retto.
Dunque, se in un triangolo ... C.D.D.

Applica: I, 8, 11, 47.

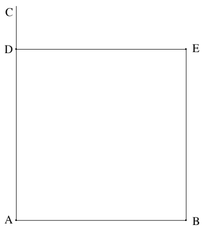
FE cade la trasversale HE, gli angoli alterni MHE e HEF sono uguali fra loro (prop. 29). Si aggiunga ad entrambi l'angolo HEL; la somma di MHE e HEL sarà uguale a quella di HEF e HEL (noz. com. II). Ma la somma di MHE e HEL è uguale a due retti (prop. 29), dunque anche la somma di HEF e HEL sarà uguale a due retti (noz. com. I). Perciò FE ed EL appartengono alla stessa retta (prop. 14). Poichè FK è uguale e parallela a HE (prop. 34) e HE a ML, anche KF sarà uguale e parallela a ML. E sono congiunti dai segmenti KM e FL. Quindi anche KM e FL sono uguali e paralleli (noz. com. I; prop. 30). Perciò KFLM è un parallelogramma. Poiché il triangolo CBD è equivalente al parallelogramma FH e il triangolo DBA al parallelogramma EM, tutto il quadrilatero ABCD è equivalente a tutto il parallelogramma KFLM (noz. com. II).
Dunque, con un angolo dato ... C.D.F.

Applica: I, 14, 29 ,30, 33, 34 ,42, 44.

PROPOSIZIONE 46. (COSTRUZIONE DEL QUADRATO)

Costruire un quadrato su un segmento dato.

Sia AB il segmento dato; sul segmento AB vogliamo costruire un quadrato.
Su AB nel punto A si innalzi la perpendicolare AC (prop. 11) e si ponga AD uguale ad AB (prop. 2); per D si conduca la parallela DE ad AB e per B si conduca la parallela BE ad AD (prop. 31).



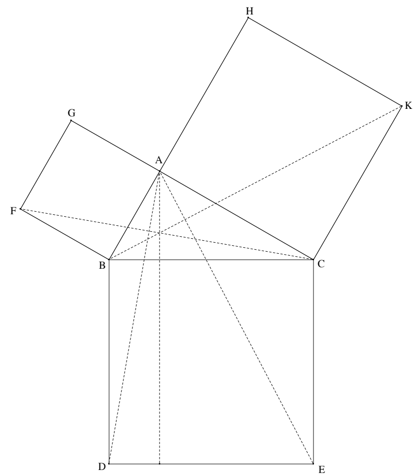
In questo modo ADEB è un parallelogramma e quindi AB è uguale a DE e AD a BE (prop. 34). Ma AB è uguale ad AD e quindi i quattro lati BA, AD, DE ed EB sono uguali tra loro (noz. com. I) e dunque il parallelogramma ADEB è equilatero. Dico che è anche rettangolo. Infatti, poiché sulle parallele AB e DE cade AD, la somma degli angoli BAD e ADE è uguali a due retti (prop. 29). Ma l'angolo BAD è retto quindi anche ADE è retto. Ma i lati e gli angoli opposti dei parallelogrammi sono uguali fra loro (prop. 34) quindi anche ciascuno degli angoli opposti ABE e BED è retto.
Dunque ADEB è rettangolo. Ma abbiamo dimostrato che è anche equilatero quindi è un quadrato (def. XXII) ed è costruito sul segmento AB. C.D.F.

Applica: I, 3, 11, 29, 31, 34.
È applicata in: I, 47.

OSSERVAZIONE
La costruzione del quadrato (e più in generale quella di un rettangolo) richiede il teorema inverso delle parallele (prop. 29) cioè l'applicazione del V postulato. Il tentativo di dimostrare l'esistenza e la possibile costruzione di un rettangolo senza ricorrere al V postulato fu tentata da G. Saccheri nel celebre *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Euclide liberato da ogni macchia)* che preclude alle geometrie non euclidee.

PROPOSIZIONE 47. (TEOREMA DI PITAGORA)

Nei triangoli rettangoli il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo retto è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui lati che comprendono l'angolo retto.
Sia ABC un triangolo rettangolo con l'angolo retto BAC. Dico che il quadrato costruito su BC è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BA e AC.



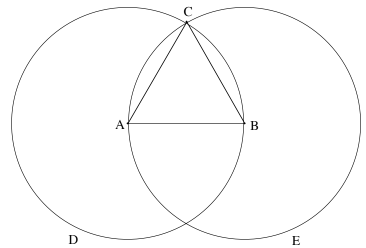
Infatti, si costruiscano sul lato BC il quadrato BDEC, sul BA il quadrato GB[18] e su AC il quadrato HC (prop. 46); per A si conduca AL parallela a BD e CE (prop. 31) e si congiungano A con D e F con C. Poiché i due angoli BAC e BAG sono retti, i due lati AC e AG, da parti opposte rispetto all'estremo A del lato AB, formano angoli adiacenti la cui somma è uguale a due retti; Perciò CA e AG appartengono alla stessa retta (prop. 14). Per la stessa ragione anche BA e AH appartengono alla stessa retta. Gli angoli DBC e FBA sono uguali perchè sono retti, si aggiunga allora ad entrambi l'angolo ABC. In questo modo tutto l'angolo DBA è uguale a tutto l'angolo FBC (noz. com. II). Inoltre poiché DB è uguale a BC e FB a BA (def. XXII) DB e BA sono rispettivamente uguali a FB e BC e l'angolo DBA è uguale all'angolo FBC. Quindi il lato AD è uguale al lato FC e il triangolo ABD è uguale al triangolo FBC (prop. IV). Ma il parallelogramma BL è doppio del triangolo ABD: infatti hanno la stessa base BD e sono compresi fra le stesse parallele BD e AL (prop. 41). Inoltre il quadrato GB è doppio del triangolo FBC: infatti hanno la stessa base FB e sono compresi tra le stesse parallele FB e GC. Quindi il parallelogramma BL è equivalente al quadrato GB[19]. Allo stesso modo, condotte AE e BK si dimostra anche che il parallelogramma CL è equivalente al quadrato HC. Quindi tutto il quadrato BDEC è equivalente alla somma dei due quadrati GB e HC (noz. com. II). Ma i

[18] Anche in questo caso il quadrato è indicato dalla diagonale.
[19] Questo è quello che oggi chiamiamo primo teorema di Euclide.

PROPOSIZIONE 1. (COSTRUZIONE DEL TRIANGOLO EQUILATERO)

Su un segmento dato costruire un triangolo equilatero.

Sia AB il segmento dato. Dobbiamo costruire sul segmento AB un triangolo equilatero.
Con centro A e raggio AB tracciamo la circonferenza BCD (post. III), poi tracciamo, con centro B e raggio BA, la circonferenza ACE (id.), e dal punto C, in cui le circonferenze si intersecano tracciamo i segmenti congiungenti CA e CB (post. I).
Ora, poiché il punto A è il centro della circonferenza CDB, si ha che AC è uguale ad AB (def. XV); di nuovo, poiché il punto B è centro della circonferenza CEB, si ha che BC è uguale a BA (id.).
Ma abbiamo dimostrato che pure CA è uguale ad AB; quindi ciascuno dei due segmenti CA e CB è uguale al segmento AB. Ma cose che sono uguali ad una stessa cosa sono uguali fra loro (noz. com. I): sono perciò uguali anche CA e CB; quindi i tre segmenti CA, CB e BC sono uguali fra loro.
Il triangolo ABC è dunque equilatero. Ed è stato costruito sul segmento dato AB.
C.D.F. (Come Dovevasi Fare).

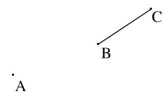


È applicata in: I, 2, 9, 10, 11.

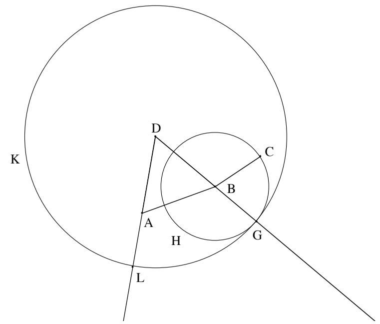
OSSERVAZIONE
Notiamo come Euclide dia per scontato che le due circonferenze si intersechino.

PROPOSIZIONE 2. (COSTRUZIONE)

Da un punto dato tracciare un segmento uguale ad un segmento dato.



Sia A il punto dato, e BC il segmento dato; dobbiamo tracciare dal punto A un segmento uguale al segmento BC.
Tracciamo il segmento AB (post. I) e su questo costruiamo il triangolo equilatero DAB (prop. 1) prolungando i lati DA e DB. Con centro B e raggio BC tracciamo la circonferenza CGH (post. III) e, di nuovo, con centro D e raggio DG tracciamo la circonferenza GKL.
Poiché il punto B è centro della circonferenza CGH si ha che BC è uguale a BG. Di nuovo, poiché il punto D è centro del cerchio GKL, si ha che DL è uguale a DG. Ora, di questi segmenti le parti DA e DB sono uguali; perciò la parte che rimane dell'una, AL, è uguale a quella che rimane dell'altra, BG (noz. com. III). Ma abbiamo dimostrato che BC è uguale a BG, ciascuno dei due segmenti AL e BC è quindi uguale al segmento BG. Ma cose che sono uguali ad una stessa cosa sono uguali fra loro (noz. com. I), quindi AL è uguale a BC.
Dunque dal punto A è stato tracciato un segmento uguale al segmento dato BC. C.D.F.

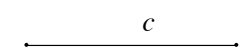


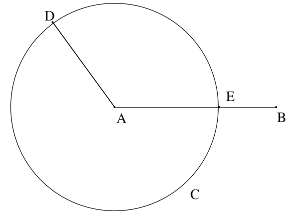
Applica I, 1.
È applicata in I, 3.

PROPOSIZIONE 3. (COSTRUZIONE)

Dati due segmenti disuguali, togliere dal maggiore un segmento uguale al minore.

Siano AB e *c* i due segmenti diseguali di cui AB il maggiore. Da AB vogliamo togliere un segmento uguale a *c*.





Dal punto A si conduca un segmento AD uguale a *c* (prop. 2); poi, con centro A e raggio AD si tracci la circonferenza CDE (post. II). Poiché il punto A è il centro della circonferenza CDE, il segmento AE è uguale a DA; ma anche *c* è uguale a DA; quindi sia AE che *c* sono uguali a AD, perciò AE è uguale a *c*.
Dunque, dati due segmenti disuguali ... C.D.F.

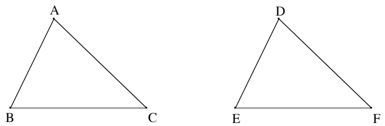
Applica: I, 2.
È applicata in: I, 5, 6, 9, 11, 16, 20, 22, 24, 26, 46.

OSSERVAZIONE
Le proposizioni 2 e 3 diventano evidenti se si ammette l'uso del movimento cui Euclide farà ricorso per dimostrare la proposizione successiva.

PROPOSIZIONE 4. (I CRITERIO DI CONGRUENZA)

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati e hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, i triangoli saranno uguali[7], e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo.

Siano ABC e DEF i due triangoli con i lati AB e AC rispettivamente uguali ai lati DE e DF e l'angolo BAC uguale all'angolo EDF. Dico che anche la base BC sarà uguale Alla base EF, che il triangolo ABC sarà uguale al triangolo DEF e che i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali.



Infatti, se si sovrappone il triangolo ABC al triangolo DEF ponendo il punto A nel punto D e il lato AB sul lato DE, anche il punto B cadrà in E perché AB è uguale a DE. Sovrapposto il lato AB su DE anche il lato AC si sovrapporrà a DF perché l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF. Quindi anche il punto C cadrà nel punto F dal momento che AC è uguale a DF. Ma anche B cadeva in E e quindi anche la base BC si sovrapporrà a EF. Infatti, siccome B cadeva in E, e C in F, se la base CB non si sovrapponesse alla base EF le due rette comprenderebbero uno spazio il che non è possibile[8]. In questo modo la base BC si sovrappone alla base EF ed è uguale ad essa (noz. com. VII). Perciò anche il triangolo ABC si sovrappone al triangolo DEF ed è ad esso uguale; e i rimanenti angoli si sovrappongono ai rimanenti angoli e sono ad essi uguali.
Dunque, se due triangoli ... C.D.D.

È applicata in: I, 5, 6, 10, 16, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 47.

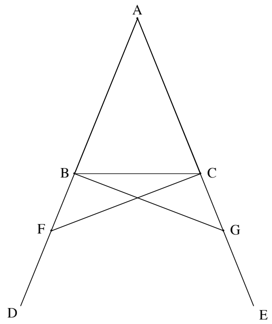
OSSERVAZIONE
Solo in questa proposizione e nella 8 Euclide fa uso della sovrapposizione delle figure piane per movimento. La visione moderna non accetta il movimento rigido e prende tale proposizione come postulato.

PROPOSIZIONE 5. (TEOREMA DEL TRIANGOLO ISOSCELE - PONS ASINORUM)

[7] Oggi si usa congruenti.
[8] vedi la nota 4.

Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali, e, se prolunghiamo i lati uguali, anche gli angoli sotto la base saranno uguali.

Sia ABC il triangolo isoscele, avente il lato AB uguale al lato AC e si prolunghi il lato AB fino a D e il lato AC fino a E. Dico che l'angolo ABC è uguale a BCE. Si prenda infatti sul segmento BD un punto a caso F; si tolga dal segmento AE il segmento AG uguale ad AF (prop. 3); si traccino poi i segmenti FC e GH.



Poiché AF è uguale ad AG, e AB ad AC, i due segmenti FA e AC sono rispettivamente uguali a GA e AB. Essi comprendono l'angolo comune FAG, perciò la base FC sarà uguale alla base GB; il triangolo AFC sarà uguale ad AGB, e i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali (prop. 4), cioè ACF sarà uguale a ABG e AFC a AGB. E poiché tutta AF è uguale a tutta AG, delle quali la parte AB è uguale alla parte AC, i resti BF e CG sono uguali (nozione comune 3). Ma è stato dimostrato che anche FC è uguale a GB, perciò i due segmenti BF e FC sono rispettivamente uguali a CG e GB, l'angolo BFC è uguale all'angolo CGB, e la loro base BC è comune. Perciò il triangolo BFC sarà uguale al triangolo CGB, ed i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Quindi l'angolo FBC è uguale a GCB, e l'angolo BCF a CBG (prop. 4). Ma poiché è stato dimostrato che tutto l'angolo ABG è uguale a tutto l'angolo ACF, dei quali la parte CBG è uguale alla parte BCF, la rimanente parte ABC sarà uguale alla rimanente ACB; ed essi sono gli angoli alla base del triangolo ABC. É stato anche dimostrato che l'angolo FBC è uguale a GCB, ed essi sono sotto la base.
Dunque gli angoli alla base di un ... C.D.D.

Applica I, 3,4.
È applicata in I, 7, 18, 19, 20, 24.

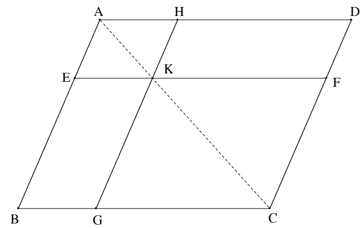
OSSERVAZIONE
Oggi noi dimostriamo questo teorema (avendo a disposizione anche il postulato della continuità) semplicemente tracciando la bisettrice e mostrando che si formano due triangoli congruenti per il primo principio. Euclide non poteva fare ciò in quanto la bisettrice non è stata ancora costruita (prop. 9). Nel tardo Medioevo questo teorema era chiamato "ponte degli asini" a quanto pare con riferimento alle difficoltà che si incontravano nel dimostrarlo.

Applica: I, 10, 23, 31, 38, 41.
È applicata in: I, 44, 45.

PROPOSIZIONE 43. (TEOREMA)

In ogni parallelogramma i complementi dei parallelogrammi intorno alla diagonale sono equivalenti fra loro.

Sia ABCD un parallelogramma e AC una sua diagonale; siano EH[16] e FG i parallelogrammi intorno ad AC, BK e KD i cosiddetti complementi. Dico che il complemento BK è equivalente al complemento KD.



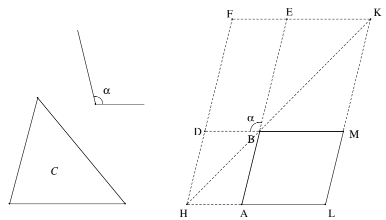
Infatti, poiché ABCD è un parallelogramma e AC una sua diagonale, il triangolo ABC è uguale al triangolo ACD (prop. 34). Di nuovo, poiché EH è un parallelogramma ed AK è una sua diagonale, il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK. Per la stessa ragione anche il triangolo KFC è uguale a KGC. Poiché il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK e KFC a KGC, la somma del triangolo AHK con il triangolo KGC è uguale a quella del triangolo AHK con il triangolo KFC (noz. com. II). Ma tutto il triangolo ABC è uguale a tutto il triangolo ADC. Perciò il rimanente complemento BK è equivalente al rimanente complemento KD (noz.. com. III).
Dunque, in ogni parallelogramma i complementi ... C.D.D.

Applica: I, 34.
È applicata in: I, 44.

PROPOSIZIONE 44. (COSTRUZIONE)

Costruire su un segmento dato, con un dato angolo, un parallelogramma equivalente ad un triangolo dato.

Sia AB il segmento dato, *C* il triangolo dato, e α l'angolo dato. Su AB, con un angolo uguale ad α, si vuole costruire un parallelogramma equivalente al triangolo *C*.



[16] Il parallelogramma EKHA è indicato dalla diagonale EH.

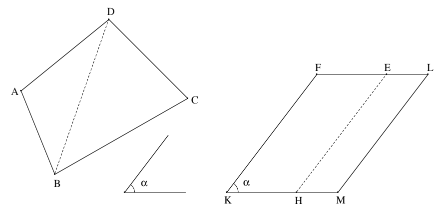
Si costruisca un parallelogramma BEFD equivalente al triangolo *C*, con l'angolo EBD uguale ad α (prop. 42); si ponga il lato BE sul prolungamento di AB, si prolunghi FD fino in H, per A si conduca AH parallela a BD ed EF (prop. 31) e si congiunga HB. Poiché sulle parallele AH e EF cade la trasversale HF la somma degli angoli AHF e HFE è uguale a due retti (prop. 29); quindi la somma degli angoli BHD e DFE è minore di due retti. Ma rette che formano angoli coniugati la cui somma è minore di due retti, prolungate indefinitamente, si incontrano (post. V); dunque HB e FK, prolungate, s'incontreranno. Si prolunghino e si incontrino in K; per il punto K si conduca la parallela KL ad entrambi i segmenti EA e FH e si prolunghino HA e DB fino ai punti L e M. In questo modo, HLKF è un parallelogramma, HK una sua diagonale, AD e ME i parallelogrammi intorno alla diagonale HK e LB e BF i cosiddetti complementi. Quindi il parallelogramma LB è equivalente a BF (prop. 43). Ma il parallelogramma BF è a sua volta equivalente al triangolo *C* quindi anche il parallelogramma LB è equivalente a *C* (noz.. com. I). Poiché l'angolo DBE è uguale all'angolo ABM (prop. 15) e DBE è uguale a α, anche l'angolo ABM è uguale ad α.
Dunque, su un segmento dato ... C.D.F.

Applica: I, 15, 29, 31, 42, 43.
È applicata in: I, 45.

PROPOSIZIONE 45. (COSTRUZIONE)

Costruire con angolo dato un parallelogramma equivalente ad un quadrilatero[17] dato.

Sia ABCD il quadrilatero dato, e α l'angolo dato; con l'angolo α si vuole costruire un parallelogramma equivalente alla quadrilatero ABCD.
Si congiunga DB e con l'angolo HKF, che è uguale ad α, si costruisca un parallelogramma FH equivalente al triangolo CBD (prop. 42); sul lato EH si costruisca, con angolo EHM, che è uguale ad α, un parallelogramma EM equivalente al triangolo DBA (prop. 44).



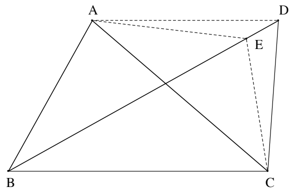
Poiché l'angolo α è uguale sia all'angolo HKF che all'angolo EHM, anche HKF sarà uguale a EHM. Si aggiunga ad entrambi l'angolo KHE. Si avra che la somma degli angoli FKH e KHE sarà uguale alla somma di KHE ed EHM. Ma la somma di FKH e KHE è uguale a due retti (prop. 29) quindi anche quella di KHE ed EHM è uguale a due retti (noz. com. II).
Allora, nell'estremo H del lato EH, i due segmenti KM e HM, non giacenti dalla stessa parte, formano angoli adiacenti uguali, quindi KM e HM appartengono alla stessa retta (prop. 14). Inoltre poiché sulle parallele KM e

[17] in originale: figura rettilinea.

PROPOSIZIONE 39. (TEOREMA INVERSO DEL 38)

Triangoli equivalenti che siano posti sulla stessa base e dalla stessa parte sono anche compresi dalle stesse parallele.

Siano ABC e DBC i triangoli equivalenti posti sulla stessa base e dalla stessa parte di BC. Dico che sono anche compresi dalle stesse parallele.



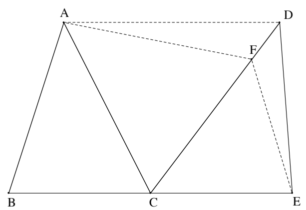
Infatti, si conduca AD. Dico che AD è parallela a BC. Supponiamo che non lo sia; si conduca per il punto A la parallela AE a BC (prop. 31), e si conduca EC. In questo modo il triangolo ABC è equivalente al triangolo EBC perché posto sulla stessa base e tra le stesse parallele (prop. 37). Ma ABC è equivalente a DBC, quindi anche DBC è equivalente a EBC (noz. com. I), il maggiore al minore, il che è impossibile. Quindi AE non è parallela a BC. Allo stesso modo potremmo dimostrare che nessun altra retta lo è, eccetto AD; quindi AD è parallela a BC. Dunque, triangoli equivalenti ... C.D.D.

Applica: I, 31, 37.

PROPOSIZIONE 40. (TEOREMA)

Triangoli equivalenti che siano posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche compresi dalle stesse parallele.

Siano ABC e CDE i triangoli equivalenti, sulle basi uguali BC e CE, dalla stessa parte. Dico che essi sono compresi dalle stesse parallele.



Infatti, si conduca AD. Dico che AD è parallela a BE. Supponiamo che non lo sia, si conduca per A la parallela AF a BE e si congiunga FE. In questo modo il triangolo ABC è equivalente al triangolo FCE, perché sono su basi uguali e tra le stesse parallele (prop. 38). Ma il triangolo ABC è equivalente al triangolo DCE. Quindi anche il triangolo DCE è equivalente al triangolo FCE (noz. com. I), il maggiore al minore, il che è impossibile. Dunque AF non è parallela a BE. Allo stesso modo potremmo dimostrare che nessun altra retta lo è eccetto AD. Quindi AD è parallela a BE.

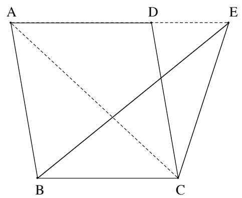
Dunque, triangoli equivalenti ... C.D.D.

Applica: I, 31, 38.

PROPOSIZIONE 41. (TEOREMA)

Se un parallelogramma ha la stessa base di un triangolo ed è compreso fra le stesse parallele, il parallelogramma è doppio del triangolo.

Il parallelogramma ABCD abbia la stessa base BC del triangolo EBC e sia compreso tra e stesse parallele BC e AE. Dico che il parallelogramma è doppio del triangolo.



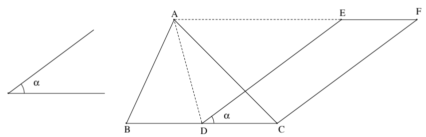
Infatti si conduca AC. Il triangolo ABC è equivalente al triangolo EBC perché a la stessa base BC ed è compreso tra le stesse parallele BC e AE (prop. 37). Ma il parallelogramma ABCD è doppio del triangolo ABC perché la diagonale AC lo divide in due parti uguali (prop. 34); perciò il parallelogramma ABCD è anche doppio del triangolo ABC.
Dunque, se un parallelogramma ha ... C.D.D.

Applica: I, 34, 37.
È applicata in: I, 42, 47.

PROPOSIZIONE 42. (COSTRUZIONE)

Costruire in dato angolo un parallelogramma equivalente ad un triangolo dato.

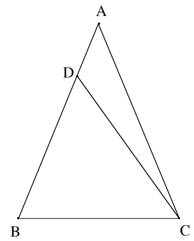
Sia ABC il triangolo dato e α l'angolo. Vogliamo costruire nell'angolo α un parallelogramma equivalente al triangolo.



Si divida a metà BC in D (prop. 10); si conduca AD e sul lato DC nel punto, si costruisca un angolo CDE uguale all'angolo α (prop. 23); per A si conduca la parallela AF (prop. 31) a DC; per C la parallela CF a DE. In questo modo il quadrilatero EDCF è un parallelogramma. Poiché BD è uguale a DC il triangolo ABD è equivalente al triangolo ADC perché hanno basi uguali e sono tra le stesse parallele (prop. 38). Quindi il triangolo ABC è doppio del triangolo ADC. Ma anche il parallelogramma EDCF è doppio del triangolo ADC perché ha stessa base ed è tra le stesse parallele (prop. 41). Quindi il parallelogramma EDCF è equivalente al triangolo ABC ed ha l'angolo CDE uguale all'angolo dato α.
Dunque abbiamo costruito in un dato angolo ... C.D.F.

PROPOSIZIONE 6. (INVERSO DEL TEOREMA DEL TRIANGOLO ISOSCELE)

Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti saranno uguali fra loro.



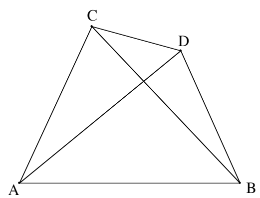
Sia ABC il triangolo avente l'angolo ABC uguale all'angolo ACB. Dico che anche il lato AB è uguale al lato AC.
Se infatti AB fosse diverso da AC uno di essi sarebbe maggiore dell'altro. Sia AB il maggiore, da esso si tolga DB uguale al minore AC (prop. 3) e si conduca DC. Poiché DB è uguale ad AC, e BC è comune, i due segmenti DB e BC sono rispettivamente uguali ad AC e CB e l'angolo DBC è uguale all'angolo ACB. Quindi la base DC è uguale alla base AB, e il triangolo DBC sarà uguale al triangolo ACB (prop. 4), un triangolo più piccolo uguale ad uno più grande, il che è impossibile. Dunque AB non è diverso da AC ma uguale.
Dunque se in un triangolo due angoli sono uguali... C.D.D.

Applica I, 3, 4.

OSSERVAZIONE
Questa è la prima dimostrazione per assurdo. Dal punto di vista moderno Euclide arriva all'assurdo che una superficie minore non può essere uguale ad una maggiore, facendo appello a concetti che non è necessario introdurre nella teoria elementare dell'uguaglianza dei triangoli; ma poteva ugualmente bene concludere che un angolo risulterebbe uguale ad una sua parte (Enriques).

PROPOSIZIONE 7. (LEMMA PER PROP. 8)

Su un segmento dato e da ciascun suo estremo si conducano due segmenti che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte altri due segmenti rispettivamente uguali a quelli prima costruiti e aventi un diverso punto di incontro.



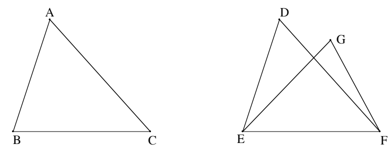
Infatti, se è possibile, sullo stesso segmento AB, si innalzino ai due punti C e D dalla stessa parte i due segmenti AD e DB rispettivamente uguali ai segmenti AC e CB e aventi gli stessi loro termini, in modo che CA sia uguale a DA, avente lo stesso estremo A, e CB sia uguale a DB, avente lo stesso estremo B; e si conduca il segmento CD. Poiché AC è uguale ad AD, anche l'angolo ACD è uguale ad ADC (prop. 5). Dunque l'angolo ADC è maggiore di DCB (noz. com. VIII). Quindi l'angolo CDB è molto maggiore di DCB. Di nuovo, poiché CB è uguale a DB, anche l'angolo CDB sarà uguale all'angolo DCB (prop. 5). Ma è stato dimostrato che è anche molto maggiore, il che è impossibile.
Dunque su un segmento dato... C.D.D.

Applica I, 5.
È applicata in: I, 8;

PROPOSIZIONE 8. (TERZO CRITERIO DI CONGRUENZA)

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali.

Siano ABC e DEF i due triangoli aventi i due lati AB e AC uguali rispettivamente a DE e DF e anche la base BC uguale alla base EF.
Dico che anche l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF.
Infatti, sovrapposto il triangolo ABC al triangolo DEF, e posto il punto B nel punto E e il segmento BC su EF, anche il punto C cadrà in F, perché BC è uguale a EF. Ma sovrapposto BC a EF anche i lati BA e CA si sovrapporranno ai lati ED e DF. Infatti, se la base BC è sovrapposta alla base EF, e i lati BA e AC non fossero sovrapposti ai lati ED e DF, ma cadessero fuori come EG e GF allora sullo stesso segmento, a due punti diversi, dalla stessa parte, sarebbero condotti due segmenti rispettivamente uguali ad altri due, aventi gli stessi estremi.



Ma questi non si possono costruire (prop. 7), perciò non può accadere che, sovrapposta la base BC alla base EF, anche i lati BA e AC non si sovrappongano ai lati ED e DF. Dunque si sovrappongono, perciò anche l'angolo BAC si sovrapporrà all'angolo EDF, e sarà ed esso uguale (noz. com. VII).
Dunque, se due triangoli hanno.... C.D.D.

Applica I, 7.
È applicata in: I, 9, 11, 12, 23, 48.

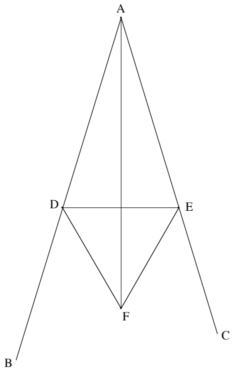
OSSERVAZIONE
La dimostrazione di questo criterio di uguaglianza dei triangoli, ricondotta per assurdo alla prop. 7, riesce didatticamente poco opportuna perché fa riferimento ad una figura impossibile. Ma già gli antichi avevano trovato la dimostrazione diretta che si

ottiene trasportando il secondo triangolo sotto il primo dopo aver fatto coincidere un lato. Si congiungono poi i due vertici ottenendo due triangoli isosceli di cui la congiungente è la base.

PROPOSIZIONE 9. (COSTRUZIONE DELLA BISETTRICE)

Dividere per metà un angolo dato.

Sia BAC un angolo dato. Bisogna dividerlo per metà. Sul lato AB si prenda un punto D qualsiasi, dal lato AC si tolga il segmento AE uguale a AD (prop. 3); si tracci poi il segmento DE e su di esso si costruisca il triangolo equilatero DEF (prop. 1). Dico che l'angolo BAC è diviso per metà dal segmento AF.
Infatti, poiché AD è uguale a AE, e AF è comune, i due segmenti DA e AF sono rispettivamente uguali a EA e AF; il lato DF inoltre è uguale al lato EF.
Quindi l'angolo DAF e uguale all'angolo EAF (prop. 8).



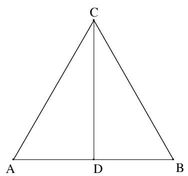
Dunque dato un angolo.... C.D.D.

OSSERVAZIONE
Dividere un angolo in tre parti con riga e compasso è impossibile. É uno dei tre problemi classici dell'antichità insieme alla duplicazione del cubo e alla quadratura del cerchio.

Applica: I, 1,3,8
È applicata in: I, 10.

PROPOSIZIONE 10. (COSTRUZIONE DEL PUNTO MEDIO)

Dividere per metà un segmento dato.



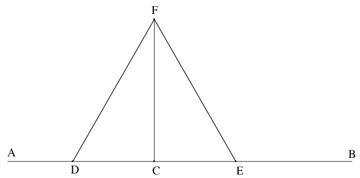
Sia AB il segmento dato; bisogna dividerlo per metà. Su di esso si costruisca il triangolo equilatero ABC (prop. 1), e si divida l'angolo ACB per metà (prop. 9); sia D l'intersezione fra la bisettrice e il segmento dato. Dico che AB è diviso per metà nel punto D. Infatti, poiché AC è uguale a CB, e CD è comune, i due segmenti AC e CD sono rispettivamente uguali a BC e CD; L'angolo ACD, inoltre, è uguale all'angolo BCD, perciò AD è uguale a BD (prop. 4). Dunque il segmento.... C.D.F.

OSSERVAZIONE
A differenza di ciò che accade per l'angolo la divisione di un segmento in tre parti uguali è possibile; Euclide la dà nel sesto libro (prop. 9) ma si può ottenere anche dalla prop. 34 del primo.

Applica: I, 1,4,9.
È applicata in: I, 12, 16, 42.

PROPOSIZIONE 11. (COSTRUZ. DELLA PERPENDICOLARE)

Su una retta data, da un punto dato su essa, innalzare una retta perpendicolare.

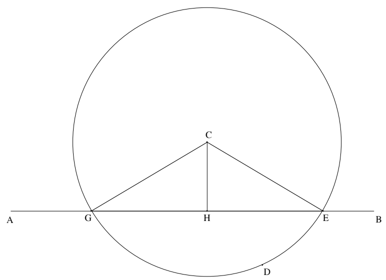


Sia AB la retta data e C il punto dato su essa. Dal punto C vogliamo condurre la perpendicolare ad AB. Prendiamo su AC un punto a caso D e poniamo CE uguale a CD (prop. 2); su DE costruiamo il triangolo equilatero FDE (prop. 1), poi tracciamo il segmento FC. Dico che FC è perpendicolare a AB.
Infatti, poiché DC è uguale a CE, e CF è comune, i due segmenti DC e CF sono rispettivamente uguali a EC e CF; l'altro lato DF è uguale a FE. Così, gli angoli DCF e ECF sono uguali (prop. 8) e sono adiacenti. Ma quando una retta innalzata su un'altra forma angoli adiacenti uguali, questi sono retti (def. X). Quindi gli angoli DCF e FCE sono retti. Dunque su una retta data... C.D.F.

Applica: I, 1, 8.
È applicata in: I, 13, 46, 48.

PROPOSIZIONE 12. (COSTRUZIONE DELLA PERPENDICOLARE DA UN PUNTO ESTERNO)

Ad una retta, da un punto dato ad essa esterno, condurre una retta perpendicolare.



Sia AB la retta e C il punto dato fuori di essa. Vogliamo

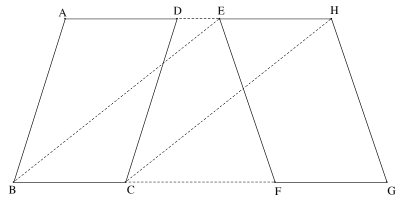
tolga il triangolo DGE in comune; il rimanente trapezio ABGD sarà uguale al rimanente trapezio EGCF (noz. com. III). Si aggiunga il triangolo comune GBC; tutto il parallelogramma ABCD risulta uguale a tutto il parallelogramma EBCF.
Dunque, parallelogrammi posti ... C.D.D.

Applica: I, 4, 29, 34.
È applicata in: I, 36, 37.

PROPOSIZIONE 36. (TEOREMA)

Parallelogrammi posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono equivalenti fra loro.

Siano ABCD e EFGH i parallelogrammi posti sulle basi uguali BC e FG e tra le stesse parallele AH BG. Dico che il parallelogramma ABCD è equivalente a FGH.



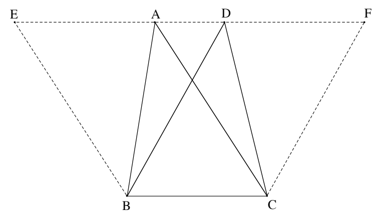
Infatti si congiungano BE e CH. Poiché BC è uguale a FG e FG è uguale EH, anche BC sarà uguale a EH (noz. com. I); inoltre sono anche paralleli e i segmenti EB e HC li congiungono. Ma i congiungenti dalla stessa parte di segmenti uguali e paralleli sono anch'essi uguali e paralleli (prop. 33). Quindi EBCH è un parallelogramma (prop. 34) ed è equivalente ad ABCD perché ha la stessa base BC ed è tra le stesse parallele BC e AH (prop.35). Per la stessa ragione anche EFGH è equivalente allo stesso EBCH. Quindi il parallelogramma ABCD è uguale a EFGH (noz. com. I).
Dunque, parallelogrammi posti ... C.D.D.

Applica: I, 33, 35.
È applicata in: I, 38.

PROPOSIZIONE 37. (TEOREMA)

Triangoli che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono equivalenti fra loro.

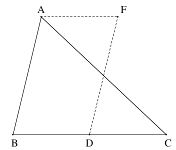
Siano ABC e DBC i triangoli posti sulla stessa base BC e tra le stesse parallele AD e BC. Dico che il triangolo ABC è equivalente al triangolo DBC.



Si prolunghi AD da ciascuna parte, verso E e verso F; per B si conduca la parallela E a CA e per C si conduca la parallela CF a BD (prop. 31). In questo modo entrambi i quadrilateri EBCA e DBCF sono parallelogrammi; inoltre sono equivalenti perché sono sulla stessa base BC e tra le stesse parallele BC e EF (prop. 35). Ma il triangolo ABC è la metà del parallelogramma EBCA perché la diagonale lo divide AB lo divide a metà (prop. 34); e anche il triangolo DBC è la metà del parallelogramma DBCF perché la diagonale DC lo divide a metà. Quindi il triangolo ABC è equivalente al triangolo DBC.
Dunque, triangolo posti ... C.D.D.

Applica: I, 31, 34, 35.
È applicata in: I, 39, 41.

OSSERVAZIONE

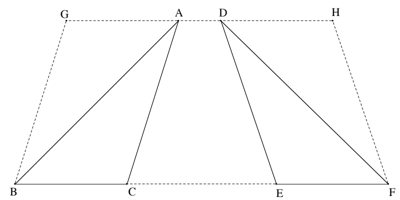


Invece di adoperare il criterio che sono equivalenti le metà di poligoni equivalenti, è facile ridursi alla precedente proposizione 35 dimostrando come un triangolo sia equivalente per somma a un parallelogramma costruito sulla metà della base e con lo stesso vertice.

PROPOSIZIONE 38. (TEOREMA)

Triangoli posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono equivalenti fra loro.

Siano ABC e DEF i triangoli posti sulle basi uguali BC ed EF tra le stesse parallele BF e AD. Dico che il triangolo ABC è equivalente al triangolo DEF.



Si prolunghi infatti AD da ciascuna parte fino a G e H; per B si conduca la parallela BG a CA e per F la parallela FH a DE (prop. 31). In questo modo i quadrilateri GBCA e DEFH sono parallelogrammi; ed equivalente fra loro perché sono posti su basi uguali e fra le stesse parallele (prop. 36). Ma il triangolo ABC è la metà del parallelogramma GBCA, perché la diagonale AB lo divide per metà (prop. 34); anche il triangolo FED è la metà del parallelogramma DEFH perché la diagonale DF lo divide a metà. Quindi il triangolo ABC è equivalente al triangolo DEF.
Dunque, triangolo posti ... C.D.D.

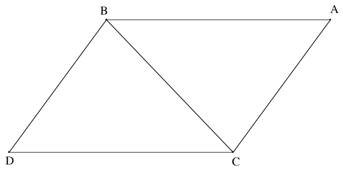
Applica: I, 31, 34, 36.
È applicata in: I, 40, 42.

Osservazione
Insieme al teorema di Pitagora (prop. 47) questa proposizione esprime uno dei teoremi più importanti del primo libro. Questi due teoremi infatti sembrano costituire i fuochi rispetto a cui viene ordinata tutta la trattazione.
Il teorema si può facilmente estendere ai poligoni dicendo che «la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $2n - 360^0$, e quella degli angoli esterni 360^0».

Proposizione 33. (Teorema)

Segmenti che congiungano dalla stessa parte segmenti uguali e paralleli sono anch'essi uguali e paralleli.

I segmenti AB e CD siano uguali e paralleli e AC e BD li congiungano dalla stessa parte. Dico che anche i segmenti AC e BD sono uguali e paralleli.



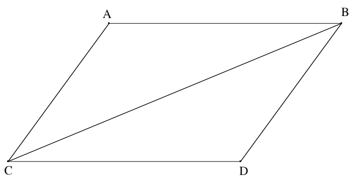
Si conduca BC. Poiché AB è parallela a CD e su di essa cade BC, gli angoli alterni ABC e BCD sono uguali fra loro (prop. 29). Inoltre dato che AB è uguale a CD, BC in comune e l'angolo ABC uguale all'angolo BCD il lato AC è uguale al lato BD, il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD e i rimanenti angoli sono rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Dunque l'angolo ABC è uguale a CBD (prop. 4). Inoltre, poiché BC, intersecando i segmenti AC e BD, forma gli angoli alterni uguali fra loro, AC è parallelo a BD (prop. 27). Abbiamo già dimostrato che AC è anche uguale a BD.
Dunque, segmenti che congiungano ... C.D.D.

Applica: I, 4, 27, 29.
È applicata in: I, 36, 45.

Proposizione 34. (Teorema)

I lati e gli angoli opposti di un parallelogramma sono uguali fra loro e la diagonale lo divide in due parti uguali.

Sia ACDB il parallelogramma e BC la sua diagonale. Dico che i lati e gli angoli opposti del parallelogramma sono uguali fra loro e che la diagonale BC lo divide in due parti uguali.



Infatti, poiché AB è parallela a CD e su di esse cade la retta BC, gli angoli alterni ABC e BCD sono uguali fra loro (prop. 29). Di nuovo, poiché AC è parallela a BD, e su di esse cade BC, gli angoli alterni ACB e CBD sono uguali tra loro (prop. 29); dunque ci sono due triangoli, ABC e BCD, che hanno due angoli, ABC e BCA, rispettivamente uguali agli angoli BCD e CBD e hanno il lato BC, quello tra gli angoli uguali, in comune. Quindi avranno rispettivamente uguali anche gli altri lati e il rimanente angolo uguale al rimanente angolo (prop. 26). Quindi il lato AB è uguale a CD e AC a BD, inoltre l'angolo BAC è uguale a CDB. E poiché l'angolo ABC è uguale a BCD e CBD a ACB tutto l'angolo QBD sarà uguale a ACD (noz. com. II). Abbiamo già dimostrato inoltre che anche BAC è uguale a CAB.
Dunque i lati e gli angoli opposti di un parallelogramma sono uguali fra loro.
Dico inoltre che la diagonale lo divide in due parti uguali.
Infatti, poiché AB è uguale a CD e BC è in comune i due lati AB e BC sono rispettivamente uguali ai lati CD e BC; inoltre, l'angolo ABC è uguale a BCD (prop. 29); quindi anche la base AC e uguale a DB e il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD (prop. 4).
Dunque la diagonale BC divide il parallelogramma in due parti uguali. C.D.D.

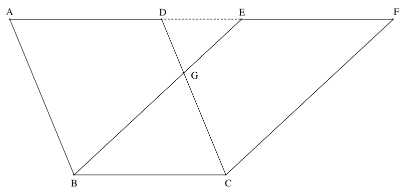
Applica: I, 4, 26, 29.
È applicata in: I, 35, 37, 38, 41, 43, 45, 46.

Osservazione
Con questa proposizione si dimostra l'esistenza del parallelogramma e si inizia la teoria dei parallelogrammi e il confronto delle superfici. Notiamo che il termine *parallelogramma* (*παραλλελόγραμμον*) viene utilizzato da Euclide senza esplicita definizione.

Proposizione 35. (Teorema)

Parallelogrammi posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono equivalenti[15] *fra loro.*

Siano ABCD e EBCF i parallelogrammi posti sulla stessa base BC e tra le stesse parallele AF e BC. Dico che ABCD è equivalente a EBCD.



Infatti, poiché ABCD è un parallelogramma AD e BC sono uguali (prop. 34). Per la stessa ragione anche EF uguale a BC, perciò AD è uguale a EF (noz. com. I); inoltre DE è comune. Dunque tutto AE è uguale a tutto DF (noz. com. II). Ma ancora, AB è uguale a DC (prop. 34), quindi i due lati EA e AB sono rispettivamente uguali a DF e DC; l'angolo FDC è uguale al corrispondente EAB (prop. 29); quindi l'altro lato EB è uguale a FC e il triangolo EAB è uguale al triangolo DFC (prop. 4). Si

[15] In originale uguali; Euclide non distingue fra eguaglianza di superficie (equivalenza) e di forma (congruenza).

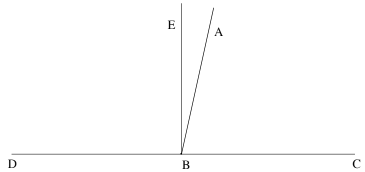
tracciare la perpendicolare ad AB passante per C.
Si prenda dall'altra parte di AB un punto a caso D, e con centro C e raggio CD si tracci la una circonferenza (post. 3) che interseca la retta nei punti G e E; si divida poi il segmento EG in due parti uguali in H (prop. 10) e si tracci il segmento CH. Dico che CH è perpendicolare ad AB.
Infatti, poiché GH è uguale a HE, e HC è comune, i due segmenti GH e HC sono rispettivamente uguali a EH e HC; il lato CG è uguale al lato CE; quindi gli angoli CHG e EHC sono uguali (prop. 8); e sono anche adiacenti. Ma quando una rette innalzata su un'altra, forma angoli adiacenti uguali, ciascuno di essi è retto e la retta si chiama perpendicolare (def. X).
Dunque, ad una retta, ... C.D.F.

Applica: I, 3, 8.

Proposizione 13. (Lemma)

Se una retta innalzata su un'altra retta forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti o angoli la cui somma è uguale a due retti.

Sia AB la retta innalzata sulla retta CD e con essa formi gli angoli CBA e ABD. Dico che questi angoli sono retti o la loro somma uguale a due retti. Infatti se CBA è uguale a ABD essi sono retti (def. X). Altrimenti, dal punto B i conduca la perpendicolare BE alla retta CD (prop. 11). In questo modo gli angoli CBE e EBD sono retti. E poiché CBE è uguale alla somma di CBA e ABE, si aggiunga EBD comune.



Così la somma di CBE con EBD è uguale alla somma dei tre angoli CBA, ABE e EBD (noz. com. II); di nuovo poiché DBA è uguale alla somma di DBE e EBA, si aggiunga ABC comune. Così la somma di DBA e ABC è uguale alla somma dei tre DBE, EBA e ABC. Ma abbiamo dimostrato che anche gli angoli CBE e EBD presi insieme sono uguali agli stessi tre angoli; e poiché cose uguali ad una stessa cosa sono uguali fra loro (noz. com. I), la somma di CBE con EBD sarà uguale a quella di DBA con ABC. Ma CBE e EBD sono due retti, quindi anche la somma di DBA e ABC è uguale a due retti. Dunque, se una retta innalzata ... C.D.D.

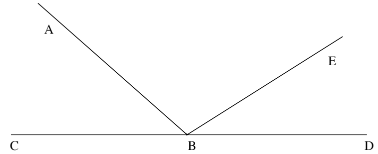
Osservazione
In questa proposizione si fa uso implicito della proprietà commutativa e associativa sull'addizione degli angoli.

Applica: I, 11.
È applicata in: I, 14, 15, 17, 28, 29, 32.

Proposizione 14. (Inverso del Lemma 13)

Se per l'estremo di un segmento, da parti opposte rispetto ad esso, si tracciano due semirette, e queste formano con il primo angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, apparterranno alla stessa retta.

Sia AB il segmento, nel suo estremo B le due semirette BC e BD, non poste dalla stessa parte, formino angoli adiacenti ABC e ABD uguali a due retti. Dico che le due semirette appartengono alla stessa retta.



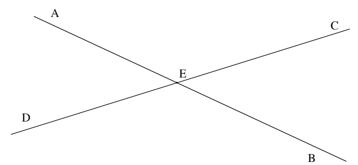
Infatti supponiamo che BC e BD non appartengano alla stessa retta ma che BE sia sul prolungamento di BC. Poiché il segmento AB è innalzato sulla retta CBE la somma degli angoli ABC e ABE è uguale a due retti (prop. 13). Ma anche gli angoli ABC e ABD sommati insieme sono uguali a due retti. Dunque la somma di ABC con ABE è uguale a quella di ABC con ABD (noz. com. I). Si tolga l'angolo CBA in comune. Il resto ABE sarà uguale al resto ABD (noz. com. III), cosa impossibile perché ABE è minore di ABD. Quindi le semirette BE e CB non appartengono alla stessa retta; questo fatto potremmo dimostrarlo per qualsiasi segmento tranne che per BD; in definitiva CB e BD appartengono alla stessa retta.
Dunque, se per l'estremo di un segmento ... C.D.D.

Applica: I, 13.
È applicata in: I, 45, 47.

Proposizione 15. (Teorema degli Angoli Opposti al Vertice)

Se due rette si intersecano formano angoli opposti al vertice uguali.

Le rette AB e CD si intersechino nel punto E. Dico che l'angolo AEC è uguale all'angolo DEB, e che CEB è uguale a AED.
Infatti, poiché la retta AE è innalzata sulla retta DC la somma degli angoli CEA e AED è uguale a due retti (prop. 13).



Siccome anche la retta DE è innalzata sulla retta AB anche gli angoli AED e DEB presi insieme sono uguali a due retti. Dunque la somma di CEA e AED e uguale a quella di AED con DEB (noz. com. I). Si tolga AED in comune; allora il resto CEA è uguale al resto BED (noz. com. III). Allo stesso modo si dimostrerà che anche CEB e DEA sono uguali.
Dunque, se due rette si intersecano ... C.D.D.

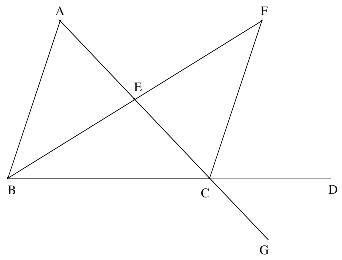
COROLLARIO (*Πόρισμα*)
Da ciò è evidente che, se due rette si intersecano, la somma degli angoli intorno al punto di incontro è uguale a quattro retti.

Applica: I, 13.
È applicata in: I, 16, 28, 29, 44.

PROPOSIZIONE 16. (TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO)

In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti.

Sia ABC il triangolo, si prolunghi un suo lato fino a D.

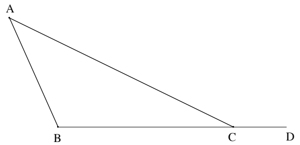


Dico che l'angolo esterno ACD è maggiore di ciascuno degli angoli esterni e opposti CBA e BAC. Si divida per metà AC in E (prop. 10) e, condotto il segmento BE, lo si prolunghi fino in F ponendo EF uguale a BE; si conduca poi il segmento FC e si prolunghi AC fino a G.
Poiché AE è uguale a EC e BE a EF, i due lati AE e EB sono rispettivamente uguali a CE e EF; inoltre l'angolo AEB è uguale all'angolo FEC poiché sono opposti al vertice (prop. 15). Dunque anche il lato AB è uguale al lato FC, il triangolo ABE è uguale al triangolo FEC e i rimanenti angoli sono rispettivamente uguali, quelli che sottendono lati eguali (prop. 4). In definitiva l'angolo BAE è uguale a ECF. Ma l'angolo ECD è maggiore di ECF (noz. com. VIII), dunque ACD è maggiore di BAE.
Allo stesso modo, diviso per metà il lato BC si può dimostrare che l'angolo BCG, uguale a ACD, è maggiore di ABC.
Dunque in ogni triangolo, se si prolunga ... C.D.D.
Applica: I, 4,10,15.
È applicata in: I, 17, 18, 21, 26, 27.

PROPOSIZIONE 17. (COROLLARIO DEL TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO - INVERSA DEL V POST.)

In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.

Sia ABC il triangolo; dico che la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.
Infatti, si prolunghi il lato BC fino a D. Poiché nel triangolo ABC l'angolo ACD è esterno, esso è maggiore dell'angolo interno e opposto ABC (prop. 16); si aggiunga ACB in comune: la somma dell'angolo ACD con ACB è maggiore di quella di ABC con BCA (noz. com. IV).



Ma la somma di ACD e ACB è uguale a due retti (prop.13), quindi ABC e BCA, presi insieme, sono minori di due retti.
Allo sesso modo potremmo dimostrare che anche BAC e ACB, presi insieme, sono minori di due retti, e così anche CAB e ABC.
Dunque, in ogni triangolo ... C.D.D.

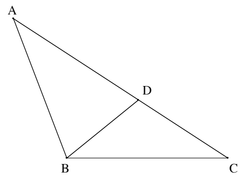
Applica: I, 13, 16.

OSSERVAZIONE
Nella proposizione 32 Euclide dimostrerà che la somma degli angoli interni di un triangolo vale proprio due retti, ma per far ciò sarà costretto a ricorrere al V postulato il quale per il momento non è stato ancora utilizzato.

PROPOSIZIONE 18. (TEOREMA)

In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore.

Sia ABC il triangolo con il lato AC maggiore di AB. Dico che anche l'angolo ABC è maggiore di BCA.
Poiché AC è maggiore di AB si ponga AD uguale a AB (prop. 2) e si conduca BD.



Poiché nel triangolo BCD l'angolo ADB è esterno esso risulta maggiore dell'angolo DCB interno e opposto (prop. 16); ma l'angolo ADB è uguale a ABD perché il lato AB è uguale a AD (prop. 5); dunque anche ADB è maggiore di ACB, perciò ABC è molto maggiore di ACB (noz. com. VIII).
Dunque, in ogni triangolo ... C.D.D.

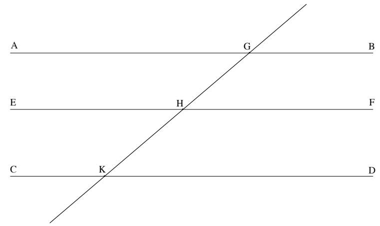
Applica: I, 3, 5, 16.
È applicata in: I, 19.

PROPOSIZIONE 19. (TEOREMA INVERSO DEL 18)

In ogni triangolo ad angolo maggiore è opposto lato maggiore.

Sia ABC il triangolo con l'angolo ABC maggiore di BCA. Dico che anche il lato AC è maggiore del lato AB. Se infatti non lo fosse, AC sarebbe uguale ad AB o minore. Ma AC non è uguale ad AB; infatti, se fosse uguale, anche l'angolo ABC sarebbe uguale a ACB (prop. 5). Ma non lo è; dunque, AC non è uguale ad AB.

cade la retta GK l'angolo GHF è uguale a GKD (prop. 29).



Ma è stato dimostrato che anche l'angolo AGK è uguale a GHF, quindi anche AGK è uguale a GKD (noz. com. I). E sono alterni; quindi AB è parallela a CD (prop. 27). C.D.D.

Applica: I, 27, 29.
È applicata in: I, 45, 47.

OSSERVAZIONE
Proclo (410-435 d.C.) è il primo ad osservare che da questa proposizione segue l'unicità della parallela. D'altronde l'ipotesi di questa unicità permette di dimostrare la precedente proposizione 29 sostituendo il V postulato con una proposizione equivalente ma più semplice.
Si possono trovare molte altre proposizioni equivalenti al V postulato, per esempio:

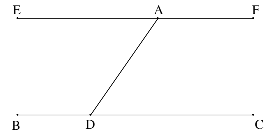
- Se una retta interseca una di due rette parallele, allora interseca anche l'altra (Proclo).
- Rette parallele alla stessa retta sono parallele fra loro (Proclo).
- Rette parallele sono equidistanti (Posidonio, I a.C.).
- La totalità dei punti equidistanti da una retta data, e dalla medesima parte di essa, costituisce una retta (G. Vitale, 1680).
- Rette che non sono equidistanti convergono in una direzione e divergono nell'altra (P. A. Cataldi, 1603).
- Su un segmento dato è sempre possibile costruire un triangolo simile ad un triangolo dato (J. Wallis, 1663 - L.N. Carnot, 1803 - A. M Legendre, 1824)
- Esiste una coppia di triangoli simili e non congruenti (G. Saccheri, 1733).
- In ogni quadrilatero con tre angoli retti, anche il quarto è retto (A.C. Clairaut, 1741 - J.H. Lambert, 1766).
- La somma degli angoli di un triangolo è 180^0 (G. Saccheri, 1733 - A.M. Legendre, inizio sec. XIX).
- È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque area data (K. F. Gauss, 1799).
- Dati tre punti non allineati è sempre possibile tracciare una circonferenza per tutti e tre i punti (A.M. Legendre - F. Bolyai, inizio sec. XIX).

La geometria moderna ha scelto la formulazione dell'unicità della parallela (J. Playfair 1748-1819) perché appare la più semplice ed evidente (per altre proposizioni equivalenti si veda: R. Trudeau - *La rivoluzione non euclidea* -Bollati Boringhieri, 1991 - p.145).

PROPOSIZIONE 31. (COSTRUZIONE DELLA PARALLELA)

Condurre per un punto dato una retta parallela ad una retta data.

Sia A il punto dato e BC la retta data. Per il punto A vogliamo condurre una retta parallela a BC.
Su BC si prenda un punto a caso D e si conduca AD; sul segmento AD con vertice in A si costruisca un angolo DAE uguale all'angolo ADC (prop. 23) e si prolunghi il lato AF fino a E.



Poiché cadendo sulle due rette BC e EF la retta AD forma gli angoli alterni EAD e ADC uguali fra loro, la retta EF è parallela a BC (prop. 27).
Dunque, per un punto A ... C.D.F.

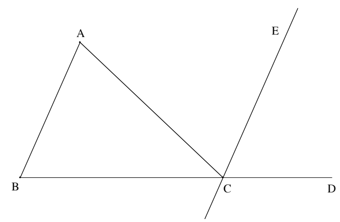
Applica: I, 23, 27.
È applicata in: I, 32, 37, 38, 39, 40, 42, 44, 46, 47.

OSSERVAZIONE
In questa proposizione Euclide costruisce la parallela ad una retta data passante per un punto senza sfruttare il V postulato. Pertanto l'esistenza di almeno una parallela è ricavabile senza far ricorso al V postulato.

PROPOSIZIONE 32. (TEOREMA DELLA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO)

In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni e opposti, e la somma dei tre angoli interni è uguale a due retti.

Sia ABC il triangolo, si prolunghi il lato BC fino a D. Dico che l'angolo esterno ACD è uguale alla somma dei due interni e opposti CAB e ABC e che la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.



Infatti, si conduca per il punto C la parallela CE alla retta AB. Poiché AB è parallela a CE, e su di essa cade AC, gli angoli alterni BAC e ACE sono uguali fra loro (prop. 29).
Di nuovo, poiché AB è parallela a CE, e su di essa cade BD, l'angolo esterno ECD è uguale all'interno e opposto ABC (prop. 29). Ma abbiamo dimostrato che anche l'angolo ACE è uguale a BAC, quindi tutto l'angolo ACD è uguale alla somma dei due interni e opposti BAC e ABC (noz. com. II).
Si aggiunga ad ambo i membri l'angolo ACB. Allora la somma di ACD e ACB è uguale alla somma dei tre angoli ABC, BCA e CAB (noz. com. II). Ma la somma di ACD e ACB è uguale a due retti (prop. 13); quindi anche la somma di ACB, CBA e CAB è uguale a due retti (noz. com. I).
Dunque, in ogni triangolo ... C.D.D.

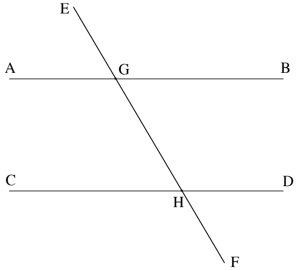
Applica: 13, 29, 31.

Applica:I, 16.
È applicata in: I, 28, 30, 31, 33.

PROPOSIZIONE 28. (COROLLARIO PROP. 27)

Se una retta, cadendo su due rette, forma angoli corrispondenti[13] uguali, oppure angoli coniugati[14] interni la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro.

La retta EF, cadendo su AB e CD, formi gli angoli corrispondenti EGB e GHD uguali, oppure gli angoli coniugati interni BGH e GHD la cui somma sia uguale a due retti. Dico che AB è parallela a CD.



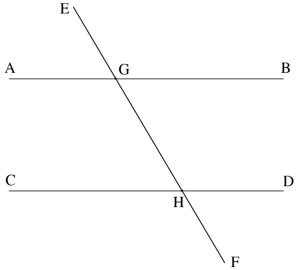
Infatti, poiché l'angolo EGH è uguale a GHD e EGB è uguale a AGH (prop. 15) anche AGH è uguale a GHD; ma AGH e GHD sono alterni interni quindi AB è parallela a CD (prop. 27).
Inoltre, poiché la somma di BGH e GHD è uguale a due retti, e anche quella di AGH e BGH è uguale a due retti (prop. 13), AGH e BGH presi insieme, sono uguali alla somma di BGH e GHD (noz. com. I). Si tolga la parte comune BGH; il resto AGH è uguale al resto GHD (noz. com. III) e sono alterni; quindi AB è parallela a CD (prop. 27).
Dunque, se una retta ... C.D.D.

Applica I, 13, 15, 27.

PROPOSIZIONE 29. (TEOREMA INVERSO DELLE PARALLELE)

Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, i corrispondenti uguali fra loro e i coniugati la cui somma è uguale a due retti.

Sulle rette parallele AB e CD cada la retta EF. Dico che essa forma gli angoli alterni AGH e GHD uguali fra loro, gli angoli corrispondenti EGB e GHD uguali fra loro e gli angoli coniugati BGH e GHD la cui somma è pari a due retti.
Infatti, se l'angolo AGH non fosse uguale a GHD, uno di essi sarebbe maggiore. Sia AGH maggiore di GHD. Si aggiunga BGH ad ambo i membri.



Si avrà che la somma degli angoli AGH e BGH è maggiore della somma di BGH e GHD (noz. com. II). Ma la somma di AGH e BGH è uguale a due retti (prop. 13); quindi la somma di BGH e GHD è minore di due retti. Ma due rette che formano angoli coniugati minori di due retti, prolungate indefinitamente, s'incontrano (**post. V**). Quindi le due rette AB e CD, prolungate indefinitamente, s'incontreranno; ma non si incontrano perché si sono supposte parallele. Quindi l'angolo AGH non è disuguale da GHD; perciò è uguale.
Inoltre l'angolo AGH è uguale EGB (prop. 15). Ma EGB è anche uguale a GHD (noz. com. I). Si aggiunga BGH ad ambo i membri. Si avrà che la somma degli angoli EGB e BGH è uguale alla somma di BGH e GHD (noz. com. II). Ma la somma di BGH e GHD è uguale a due retti quindi anche la somma di BGH e GHD è uguale a due retti.
Dunque, una retta che cada.. C.D.D.

Applica: I, 13, 15 e il **post. V**
È applicata in: I, 30, 32, 33, 34, 44, 45, 46.

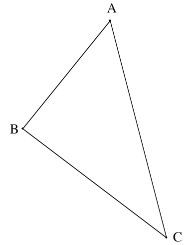
OSSERVAZIONE
Il V postulato ha suscitato fin dall'antichità perplessità circa la sua evidenza che, indubbiamente, devono aver tormentato lo stesso Euclide, il quale lo utilizza il più tardi possibile, solo a partire da questa proposizione. Si può ipotizzare che Euclide abbia cercato di dimostrare il V postulato partendo dai primi quattro; abbia cioè dedotto da questi il massimo numero di proposizioni possibile in modo da ottenere poi il V postulato come teorema. Non avendo però trovato la dimostrazione, ed essendo tuttavia convinto della verità di tale proposizione, la inserì alla fine fra i postulati non potendone fare a meno. A sostegno di questa ipotesi si può osservare che, per dimostrare la proposizione 29, che è l'inversa della 27 e della 28, occorre il V postulato, che invece non serve per la dimostrazione di queste ultime. Nella geometria classica non esiste forse alcun altro esempio di un teorema la cui dimostrazione richieda ipotesi ulteriori rispetto a quelle che sono necessarie per dimostrare il suo inverso. Inoltre, come ulteriore prova, basta notare che le prop. 16 e 17 ricevono una determinazione più completa nella prop. 32.

PROPOSIZIONE 30. (PROPRIETÀ TRANSITIVA DEL PARALLELISMO)

Rette parallele ad una stessa retta sono parallele fra loro.

Siano AB e CD parallele a EF. Dico che anche AB è parallela a CD.
Le intersechi infatti la retta GK. Poiché sulle rette parallele AB ed EF cade la retta GK l'angolo AGK è uguale a GHF (prop. 29). Inoltre poiché sulle rette parallele EF e CD

[13] in originale: angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto dalla stessa parte.
[14] in originale: interni, dalla stessa parte.



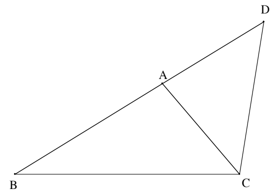
E neppure AC è minore di AB, perché anche l'angolo ABC sarebbe minore di ACB (prop. 18), il che non è. Dunque AC non è minore di AB. Ma abbiamo dimostrato che non è neppure uguale, perciò AC è maggiore di AB.
Dunque, in ogni triangolo ... C.D.D.

Applica: I, 5, 18.
È applicata in: I, 20, 24.

PROPOSIZIONE 20. (TEOREMA - DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

In ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente.

Sia ABC il triangolo; dico che la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del rimanente.



Infatti, si prolunghi il lato BA fino a D ponendo AD uguale a CA e si conduca CD. Poiché DA è uguale a AC l'angolo ADC è uguale a ACD (prop. 5). Quindi l'angolo BCD è maggiore dell'angolo ADC (noz. com. VIII). Poiché il triangolo DCB ha l'angolo BCD maggiore di BDC, e angolo maggiore sottende lato maggiore, DB è maggiore di BC (prop. 19). Ma DA è uguale a AC, quindi la somma di BA e AC è maggiore di BC. Allo stesso modo potremmo dimostrare che la somma di AB e BC è maggiore di CA e la somma di BC e CA è maggiore di AB.
Dunque in ogni triangolo la somma ... C.D.D.

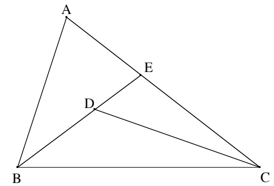
Applica: I, 3, 5, 19.
È applicata in: I, 21.

OSSERVAZIONE
Questa proposizione esprime la proprietà di minimo che volgarmente si enuncia dicendo che "la retta è il più breve cammino fra due punti". Questa proprietà, in tutta la sua generalità, viene enunciata come postulato da Archimede. Legendre l'ha assunta come definizione di retta. Notiamo che in Euclide la definizione di retta risulta alquanto oscura "quella che giace egualmente rispetto ai suoi punti".

PROPOSIZIONE 21. (TEOREMA)

Se, a partire dagli estremi del lato di un triangolo, si conducono due segmenti che si incontrino internamente al triangolo stesso, i segmenti così costruiti, sommati assieme, saranno minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma comprenderanno un angolo maggiore.

Nel triangolo ABC, dagli estremi B e C del lato BC si conducano due segmenti BD e DC che si congiungano internamente. Dico che la somma di BD e DC è minore della somma di BA e AC, ma che comprendono un angolo BDC maggiore di BAC.



Infatti, si prolunghi BD fino a E. Poiché in ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del rimanente (prop. 20), la somma dei due lati AB e AE del triangolo ABE è maggiore di BE; si aggiunga EC ad entrambi[9]: la somma di BA e AC sarà maggiore di quella di BE e EC (noz. com. IV). Di nuovo, poiché la somma dei due lati CE ed ED del triangolo CED è maggiore di CD se si aggiunge DB ad entrambi, la somma di CE + EB sarà maggiore di quella di CD e DB. Ma abbiamo dimostrato che la somma di BA e AC è maggiore della somma di BE ed EC; quindi la somma di BA e AC è, a maggior ragione, maggiore della somma di BD e DC.
Inoltre, poiché in ogni triangolo l'angolo esterno è maggiore di uno interno e opposto (prop. 16), nel triangolo CDE l'angolo BDC è maggiore di CED. Per la stessa ragione anche nel triangolo ABE l'angolo esterno CEB è maggiore di BAC. Ma abbiamo dimostrato che l'angolo BDC è maggiore di CEB; dunque, a maggior ragione, BDC è maggiore di BAC.
Dunque, se a partire dagli estremi ... C.D.D.
Applica: I, 16, 20.

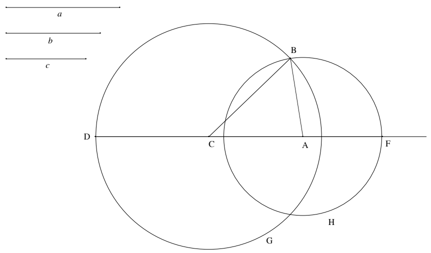
PROPOSIZIONE 22. (COSTRUZIONE DEL TRIANGOLO)

Con tre segmenti uguali a tre segmenti dati, costruire un triangolo; occorre che la somma di due di essi, comunque presi, sia maggiore del rimanente (prop. 20).

Siano a, b e c i tre segmenti dati, dei quali la somma di due, comunque presi, sia maggiore del rimanente. Con tre segmenti uguali ad a, b, e c si deve costruire un triangolo.
Si prenda una semiretta[10] con origine in D e si ponga DC uguale ad a, AC uguale a b, e AF uguale a c. Con centro C e raggio CD si tracci la circonferenza DBG; di nuovo, con centro A e raggio AF si tracci la circonferenza BFH e si

[9] in originale: in comune; $AB + AE > BE \Rightarrow AB + AE + EC > BE + EC$.
[10] nell'originale: retta terminata in D e infinita verso E.

conducano i segmenti BC e BA. Dico che con tre segmenti uguali ad *a*, *b* e *c* si è costruito il triangolo ABC.



Infatti poiché il punto C è il centro della circonferenza DBG il segmento CD è uguale a CB; ma CD è uguale ad *a*; quindi anche CB è uguale ad *a* (noz. com. I); di nuovo, poiché il punto A è il centro della circonferenza BFH, il segmento AF è uguale ad AB; ma AF è uguale a *c*, quindi anche AB è uguale a *c*; ma anche AC è uguale a *b*; in definitiva i tre segmenti BC, CA e AB sono uguali ad *a*, *b* e *c*.
Dunque, con tre segmenti uguali ... C.D.D.

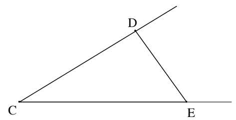
Applica I, 3.
È applicata in:I, 23.

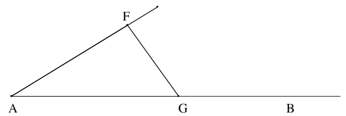
OSSERVAZIONE
L'esistenza effettiva delle intersezioni delle circonferenze segue dalle restrizioni imposte dalla prop. 20 ma, come nella prop. 1, non è esplicitamente dimostrata.

PROPOSIZIONE 23. (COSTRUZIONE DI UN ANGOLO)

Costruire su una retta data, e con vertice in un dato punto di essa, un angolo[11] *uguale ad un angolo dato.*

Sia AB la retta data, e A il punto su di essa; sia DCE l'angolo dato. Sulla retta AB e nel suo punto A vogliamo costruire un angolo uguale a DCE.





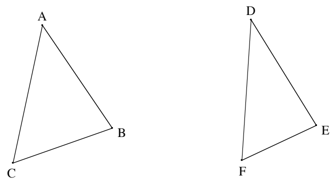
Su ognuno dei lati dell'angolo DCE si prendano due punti D ed E a caso e si congiungano.
Con tre segmenti uguali a CD, DE e CE si costruisca il triangolo AFG, in modo che CD sia uguale ad AF, CE ad AG e DE a FG (prop. 22). Poiché i due lati CD e CE sono uguali rispettivamente a FA e AG, e l'altro lato[12] DE è uguale a FG, l'angolo DCE è uguale a FAG (prop. 8).
Dunque su una retta data ... C.D.F.

Applica: I, 8, 22.
È applicata in: I, 24, 31, 42.

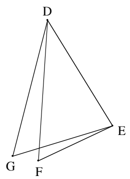
PROPOSIZIONE 24. (TEOREMA)

Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base.

Siano ABC e DEF i due triangolo con i lati AB e AC uguali rispettivamente ai lati DE e EF e l'angolo in A maggiore dell'angolo in D. Dico che anche la base BC è maggiore della base EF.



Infatti, poiché l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF, con vertice in D e sul lato DE si costruisca l'angolo EDG uguale all'angolo BAC (prop. 23); si ponga DG uguale ad AC e si congiungano EG e FG.



Poiché dunque AB è uguale a DE, e AC a DG, i due lati BA e AC sono rispettivamente uguali a i lati ED e EG; l'angolo BAC è uguale all'angolo EDG; quindi la base BC è uguale a EG. Di nuovo, poiché DF è uguale a DG, anche l'angolo DGF è uguale a DFG. Quindi l'angolo DFG è maggiore di EGF (noz. com. VIII), perciò, a maggior ragione, l'angolo EFG è maggiore di EGF. Inoltre, poiché il triangolo EFG ha l'angolo EFG maggiore di EGF, e angolo maggiore sottende lato maggiore (prop. 19), anche il lato EG sarà maggiore di EF. Ma EG è uguale a BC, quindi BC è maggiore di EF.
Dunque, se due triangoli ... C.D.D.

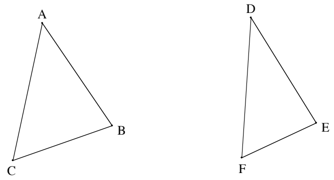
Applica: I, 3, 4, 5, 19, 23.
È applicata in: I, 25.

PROPOSIZIONE 25. (TEOREMA)

Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno la base maggiore della base, avranno anche l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente.

[11] nell'originale si specifica angolo rettilineo.
[12] nell'originale: base.

Siano ABC e DEF due triangoli con i lati AB e AC rispettivamente uguali ai lati DE e DF; la base BC sia maggiore della base EF. Dico che anche l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF.



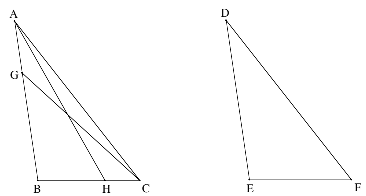
Se infatti non lo fosse, sarebbe uguale o minore. Ma l'angolo BAC non è uguale a EDF perché la base BC sarebbe uguale a EF (prop. 4); ma ciò non è, quindi l'angolo BAC non è uguale a EDF. E neppure è minore perché in questo caso la base BC sarebbe minore di EF (prop. 24); ma anche questo non è vero, quindi l'angolo BAC non è minore di EDF. Ma abbiamo dimostrato che non è neppure uguale, perciò può essere solo maggiore.
Dunque, se due triangoli ... C.D.D.

Applica: I, 4, 24.

PROPOSIZIONE 26. (II CRITERIO DI CONGRUENZA)

Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli e un lato uguale ad un lato, o quello adiacente agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente.

Siano ABC e DEF i due triangoli con i due angoli ABC e BCA rispettivamente uguali a DEF ed EFD; abbiano anche un lato uguale ad un lato, dapprima quello tra gli angoli uguali, cioè BC uguale a EF. Dico che i due triangoli avranno uguali anche i rimanenti lati rispettivamente uguali ai rimanenti lati; e il restante angolo uguale al restante angolo.
Se infatti AB non fosse uguale a DE, uno di essi sarebbe maggiore. Sia AB maggiore, si ponga BG uguale a DE e si congiunga GC.



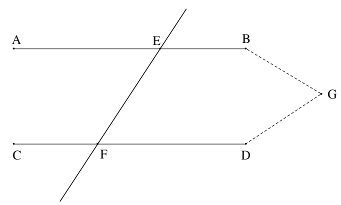
Poiché BG è uguale a DE, BC a EF e l'angolo GBC a DEF la base GC sarà uguale alla base DF e il triangolo GBC sarà uguale a al triangolo DEF, i restanti angoli saranno uguali ai restanti angoli, quelli che sottendono lati uguali.. Quindi l'angolo GCB sarà uguale a DFE. Ma DFE si è supposto uguale a BCA, quindi anche BCG è uguale a BCA (noz. com. I), il maggiore al minore, il che è impossibile (noz. com. VIII). Dunque AB non è disuguale a DE; quindi è uguale. Ma anche BC è uguale a EF; perciò i due lati AB e BC sono rispettivamente uguali a DE e EF e l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF; dunque la base AC è uguale alla base DF e il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente angolo EDF (prop. 4).
Siano ora uguali i lati che sottendono angoli uguali, come AB e DE. Di nuovo dico che i rimanenti lati saranno uguali ai rimanenti lati e anche il rimanente angolo sarà uguale al rimanente angolo.
Se infatti BC fosse disuguale da EF uno di essi sarebbe maggiore. Sia BC il maggiore; si ponga BH uguale a EF, e si congiunga AH. Poiché AB e BH sono rispettivamente uguali a DE ed EF e comprendono angoli uguali, la base AH è uguale alla base DF, il triangolo ABH è uguale al triangolo DEF e i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Dunque l'angolo BHA è uguale all'angolo EFD. Ma EFD è uguale a BCA, cioè nel triangolo AHC l'angolo esterno BHA è uguale all'interno e opposto BCA, cosa impossibile (prop. 16). Dunque BC non è disuguale a EF, quindi è uguale. Ma anche AB è uguale a DE perciò i due lati AB e BC sono rispettivamente uguali ai lati DE e EF e comprendono angoli uguali. Quindi la base AC è uguale alla base DF; il triangolo ABC è uguale a triangolo DEF, e il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente angolo EDF.
Dunque, se due triangoli ... C.D.D.

Applica: I, 3, 4, 16.
È applicata in: I, 34.

PROPOSIZIONE 27. (TEOREMA DIRETTO DELLE PARALLELE)

Se una retta, cadendo su altre due rette, forma gli angoli alterni (interni) uguali, le due rette saranno parallele.

La retta EF, cadendo sulle due rette AB e CD, formi gli angoli alterni AEF ed EFD uguali fra loro. Dico che AB è parallela a CD.
Se infatti non lo fosse, AB e CD, prolungate, si incontrerebbero da una parte o dall'altra. Supponiamo che, prolungate, si incontrino dalla parte dei punti B e D, nel punto G.



Allora, nel triangolo GEF, l'angolo esterno AEF è uguale a quello interno e opposto EFG, il che è impossibile (prop. 16). Dunque AB e CD, prolungate, non si incontrano dalla parte di B e D. Allo stesso modo si può dimostrare che non si incontrano neppure dalla parte di A e B. Ma rette che non si incontrano in nessuna delle due parti sono parallele (def. XXIII). Quindi AB è parallela a CD.
Dunque, se una retta ... C.D.D.