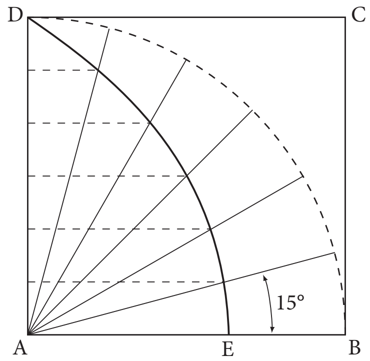
Riferimenti bibliografici

L. Bunt, P. Jones, J. Bedient, *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Zanichelli, 1983
C. Boyer, *Storia della matematica*, Isedi, 1976
G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica grecia*, Hoepli, 1914

Marco Savarese

I tre problemi classici dell' antichità



Liceo Scientifico Statale "A. Righi" Roma

A Valerio, che non c'ha dormito

Indice

questa dispensa è disponibile su: www.savarese.altervista.org

GENNAIO 2012 - V. 1.2

$$HQ = HM + MQ = \frac{y+3a}{2}$$

In definitiva la proporzione diventa

$$\frac{x}{2} = \frac{b}{y} = \frac{y+3a}{2x}$$

Eguagliando il primo membro di questa equazione a ciascuno dei rimanenti si ottiene il sistema

$$\begin{cases} xy = 2b \\ x^2 = y+3 \end{cases}$$

che equivale all'equazione cubica

$$x^3 - 3x - 2b = 0 \quad (2)$$

che potremmo chiamare l'equazione della trisezione, in quanto il problema sarebbe risolto qualora essa avesse una radice costruibile. Ma l'equazione (2) è una equazione parametrica e l'avere o meno radici costruibili dipende dal valore di b.
Per esempio, se $b = 0$ l'equazione (2) diventa

$$x(x^2 - 3) = 0$$

che ha radici 0, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$; tutte costruibili. In effetti se $b = 0$ l'angolo BOC vale 90° e questo angolo si triseca molto facilmente. In verità vi sono infiniti angoli che possono essere trisecati: ogni angolo minore di 60° che siamo in grado di costruire è la terza parte di un angolo che possiamo trisecare.
Consideriamo ora $b = 1/2$, caso per cui l'equazione della trisezione diventa

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Per il teorema della radice razionale le possibili soluzioni razionali di questa equazione sono ±1. Poiché nessuno di questi valori la soddisfa essa non ammette soluzioni razionali. Se ne deduce allora, dal teorema della radice costruibile, che questa equazione non ha neanche radici costruibili. Non è quindi possibile trisecare un angolo per cui vale $b = 1/2$; per tale valore il triangolo rettangolo OBC ha l'ipotenusa doppia di un cateto quindi l'angolo AOB vale 60°. Dal momento che abbiamo trovato un angolo che non può essere trisecato abbiamo dimostrato che la trisezione dell'angolo, facendo uso soltanto della riga e del compasso, è impossibile.

dunque $p + q\sqrt{v} \in \mathbb{K}_n$, con $\sqrt{v} \notin \mathbb{K}_{n-1}$ soluzione dell'equazione (1). É possibile dimostrare[3] che anche $p - q\sqrt{v}$ è soluzione della (1). Abbiamo visto che la somma delle tre radici è pari a $-b/a$ quindi $x_1 + p + q\sqrt{v} + p - q\sqrt{v} = -b/a$ cioè $x_1 = -b/a - 2p$ che appartiene a $\mathbb{K}_{n-1}$; ciò è assurdo perché si era supposto che n fosse il più piccolo numero tale che un campo $\mathbb{K}_n$ contenga una radice della cubica di partenza.

L'impossibilità della duplicazione del cubo

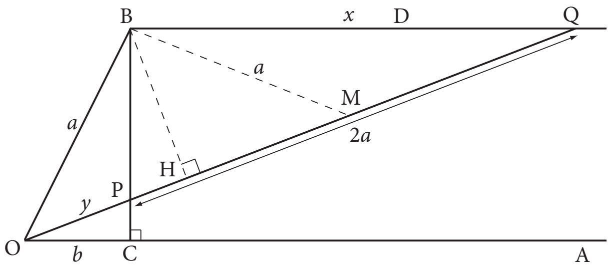
Siamo finalmente arrivati alla dimostrazione dell'impossibilità della duplicazione del cubo. Si scelga una unità di lunghezza pari al lato del cubo assegnato. Il volume del cubo allora risulta uguale a 1, perciò il cubo richiesto ha un volume uguale a 2. Vogliamo adesso costruire un segmento che ha la stessa lunghezza del lato del cubo cercato, sia x tale lunghezza si ha

$$x^3 = 2$$

equazione cubica che non ha radici razionali è quindi, per il teorema della radice costruibile, non ha neanche radici costruibili.

L'impossibilità della trisezione dell'angolo

Per la trisezione basta far vedere che esiste un angolo che non possa essere trisecato. Si consideri la soluzione di Nicomede



dove abbiamo indicato con b = OC, x = BQ e y = OP; inoltre siccome a è arbitrario lo fissiamo da subito pari all'unità di misura, cioè $a = 1$.
Come prima cosa osserviamo che i triangoli PBQ, PCO e BHQ sono simili, per cui i lati sono in proporzione

$$\frac{x}{2} = \frac{b}{y} = \frac{HQ}{x}$$

il triangolo OMB è isoscele e quindi l'altezza è anche mediana, da cui

$$\mathrm{HM} = \frac{1}{2}\mathrm{OM} = \frac{y+a}{2}$$

allora

3. La dimostrazione è un po' laboriosa, bisogna sviluppare $a(p + q\sqrt{v})^3 + b(p + q\sqrt{v})^2 + c(p + q\sqrt{v}) + d = 0$, portarla nella forma $A + B\sqrt{v} = 0$ che implica $A = 0$ e $B = 0$; Se ora sviluppiamo $a(p - q\sqrt{v})^3 + b(p - q\sqrt{v})^2 + c(p - q\sqrt{v}) + d$, ci accorgiamo che essa è uguale a $A - B\sqrt{v}$, anch'essa nulla per A e B uguali a 0.

1. I tentativi di costruzione

Introduzione

I tre famosi problemi degli antichi greci rimasti senza soluzione sono: la "quadratura" del cerchio (cioè la costruzione di un quadrato che abbia la stessa superficie di un cerchio dato), la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo. C'è una cosa importante da aggiungere però: i problemi dovevano essere risolti facendo uso soltanto della riga (senza graduazione) e del compasso.

Sorge spontanea la domanda: perché era consentito solo l'uso della riga e del compasso? Perché limitarsi a questi due soli strumenti? Come vedremo gli stessi greci trovarono soluzioni alternative ai problemi le quali però richiedono l'utilizzo di linee curve anziché di sole rette e circonferenze; queste soluzioni li lasciarono comunque sempre insoddisfatti. La questione, in verità, è squisitamente filosofica o per meglio dire estetica: Platone concepiva la retta e la circonferenza quali curve essenziali e perfette (la circonferenza ancora più perfetta della retta essendo una curva finita) e riteneva, a torto, che qualsiasi figura geometrica potesse essere costruita attraverso la combinazione di queste due sole entità fondamentali. Il pregiudizio che dovesse esistere una soluzione elegante che facesse uso solamente della riga e del compasso portò a scartare tutte le soluzioni alternative trovate, ma ebbe il merito di condurre alla scoperta di una notevole quantità di nozioni matematiche. Oggi sappiamo che è impossibile effettuare le costruzioni in questione con i soli strumenti concessi dai filosofi ma la dimostrazione di ciò venne compiutamente sviluppata soltanto nel diciannovesimo secolo mediante nozioni algebriche che non erano note agli antichi greci. Ripercorreremo in queste pagine l'affascinante storia dei tentativi di costruzione.

La geometria greca, in un certo senso, è un gioco da tavolo fatto di costruzioni geometriche con riga e compasso e come tutti i giochi possiede regole ben precise. Anche la riga e il compasso non possono essere utilizzati a nostro piacimento, sono soggetti a tre regole che devono essere assolutamente rispettate. Primo, con la riga si può tracciare il segmento da un punto qualsiasi ad un altro punto qualsiasi. Secondo, sempre con la riga, si può prolungare un segmento quanto ci pare (ovviamente di una quantità finita). Terzo, col compasso si può tracciare una circonferenza con centro e raggio qualsiasi. Tutto qui, altro non è permesso[1].

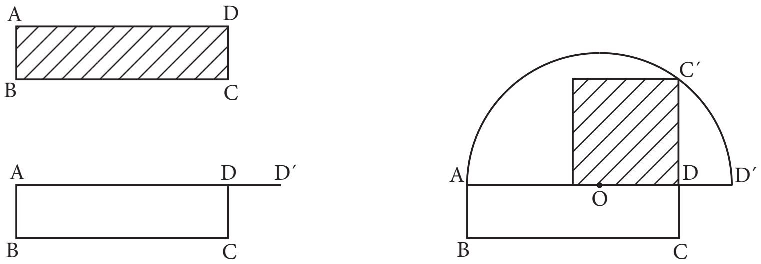
Non si può quindi prendere col compasso un segmento di una certa lunghezza e trasportarlo dove ci pare, oppure fare la stessa cosa con la riga ponendovi sopra dei segni. Questa operazione, in verità, può essere eseguita, il fatto è che non si può fare direttamente. I greci erano talmente amanti della perfezione che il loro senso estetico considerava inelegante postulare più dello stretto indispensabile; per cui il trasporto di un segmento mediante l'uso del compasso non è consentito solo perché esiste

1. Le tre regole non sono altro che i primi tre postulati di Euclide. Il quarto postulato richiede che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro, il quinto è il famoso V postulato: si veda la dispensa " La storia del V postulato".

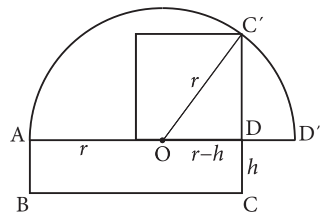
una procedura più complicata, che coinvolge solo le tre regole citate, mediante la quale è possibile svolgere lo stesso compito. Questa procedura è enunciata nella proposizione II del primo libro degli Elementi.

É esperienza comune che un gioco si impari più velocemente vedendo qualcun'altro giocare che leggendo per bene le istruzioni quindi iniziamo subito col quadrare alcune figure molto semplici, per esempio un rettangolo.

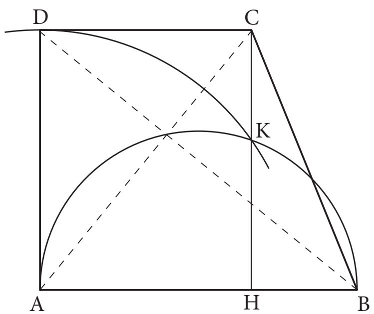
Quadratura del rettangolo (Euclide, libro II, prop. XIV)



Sia ABCD il rettangolo dato, si prolunghi AD di un segmento DD′ pari all'altezza DC (basta tracciare la circonferenza di centro D e raggio DC), poi si bisechi AD′ e sia O il punto di bisezione (basta costruire due triangoli equilateri uno sopra e l'altro sotto), si tracci la semicirconferenza di centro O e raggio OA. Si prolunghi CD fino ad incontrare la semicirconferenza nel punto C′. Il segmento DC′ è il lato del quadrato che stiamo cercando.



Ma chi ci dice che il quadrato di lato DC′ ha proprio la stessa superficie del rettangolo di partenza? Evidentemente dopo ogni costruzione c'è sempre bisogno di una bella dimostrazione che ci garantisca che quello che abbiamo trovato corrisponde effettivamente a ciò che cerchiamo. La dimostrazione andrebbe effettuata per via puramente geometrica, ma la cosa il più delle volte non è affatto banale, meglio ricorrere all'algebra[2]. Sia r il raggio della semicirconferenza, e h l'altezza del rettangolo. La superficie del rettangolo vale semplicemente: $(2r - h)h$; per la superficie del quadrato usiamo il teorema di Pitagora sul triangolo ODC′, si ha: $r^2 - (r - h)^2 = 2rh - h^2$ c.v.d.



Vi mostro un problema di costruzione, di cui ho trovato la soluzione (a dire il vero l'ha trovata un mio studente) ma del quale sto ancora cercando la dimostrazione puramente geometrica. Il problema chiede di costruire il trapezio rettangolo che ha per basi due segmenti assegnati e le diagonali perpendicolari fra loro. La costruzione è la seguente: sia AB la base maggiore assegnata, da A si innalzi la perpendicolare, sia H il punto di AB tale che AH sia pari alla

2. In verità Cartesio inventa la geometria analitica proprio per risolvere più agevolmente i problemi geometrici.

dei dati[2] mediante un numero finito di operazioni razionali e di estrazioni di radici quadrate.
In conclusione siamo arrivati a poter enunciare il seguente risultato generale

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché un problema sia risolubile con riga e compasso è che si possa tradurre in un problema algebrico risolubile per radicali quadratici cioè che i parametri delle soluzioni si possano ottenere da $\mathbb{Q}$ ampliato con i parametri dei dati attraverso un numero finito di operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate.

Siamo quasi arrivati alla dimostrazione dell'impossibilità della duplicazione e della trisezione, dobbiamo soltanto richiamare i seguenti teoremi:

Lemma. Se a, b, c sono numero interi, a e b sono primi fra loro e a è un divisore del prodotto bc, allora a è un divisore di c.

Teorema della radice razionale. Se m/n (con m e n primi fra loro) è una soluzione razionale dell'equazione

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

a coefficienti interi, allora m divide il termine noto e n divide il coefficiente di x^3.
dim. sostituendo $x=m/n$ in (1) si ha:

$$a\frac{m^3}{n^3}+b\frac{m^2}{n^2}+c\frac{m}{n}+d=0 \;\Rightarrow\; am^3+bnm^2+cn^2m+n^3d=0$$

che riscriviamo in due modi, isolando rispettivamente il primo e l'ultimo addendo e raccogliendo un fattore comune al secondo membro:

$$am^3=-n\left(bm^2+cnm+n^2d\right),$$
$$dn^3=-m\left(cn^2+bmn+am^2\right);$$

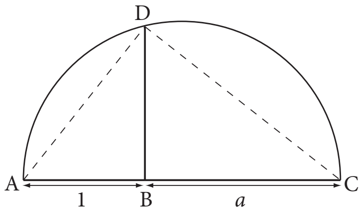
Si noti che le quantità fra parentesi sono intere. Dalla prima eguaglianza si deduce che n è un divisore di am^3. Ma n e m^3 sono primi fra loro e quindi per il lemma precedente n è un divisore di a. Analogamente dalla seconda eguaglianza segue che m divide d.

Teorema. La somma delle tre radici dell'equazione cubica (1) vale $-b/a$.
dim. siano x_1, x_2 x_3 le tre radici, basta sviluppare l'espressione $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ e confrontare il coefficiente di II grado.

Teorema della radice costruibile. Se un'equazione cubica a coefficienti razionali non ha radici razionali allora nessuna delle sue radici è un numero costruibile a partire da $\mathbb{Q}$.
dim. supponiamo per assurdo che esista una soluzione costruibile e quindi appartenente all'ultimo campo di una catena di campi estesi a partire da $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{K}_n$ e inoltre sia n il più piccolo numero per cui ciò avvenga (si avrà $n > 0$ perché per ipotesi l'equazione non ha radici razionali). Sia

2. Un punto e una retta possono essere visti come coppie ordinate di numeri $(x; y)$, (m, q), una circonferenza come terna di numeri $(x_c; y_c; r)$; questi sono i parametri dei dati. Analogamente si parla di parametri delle soluzioni.

Proposizione. La radice quadrata di un numero costruibile è costruibile.
Sia AB il segmento unitario, lo prolunghiamo dalla parte di B di una quantità BC pari al numero a di cui vogliamo estrarre la radice quadrata; costruiamo la semicirconferenza di diametro AC e innalziamo da B la perpendicolare che interseca la semicirconferenza in D, DB è il segmento cercato; infatti per il secondo teorema di Euclide $DB^2 = AB \cdot BC$ ovvero $DB = \sqrt{a}$.



Quanto detto porta alle seguenti conclusioni:
1. Tutti i numeri razionali ($\mathbb{Q}$) sono costruibili.
2. Posto $k \in \mathbb{Q}$, ma $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$ è possibile costruire un nuovo campo dato dall'estensione $\mathbb{K}(\sqrt{k}) = \{a + b\sqrt{k};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ che contiene $\mathbb{Q}$ come sottocampo. I numeri del nuovo campo sono chiaramente tutti costruibili. Procedendo di questo passo possiamo costruire infinite estensioni di numeri costruibili: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{K}_n \subset \ldots$

in altre parole, *Tutti i numeri ottenuti con operazioni razionali e estrazioni di radici quadrate sono costruibili.*

Supponiamo ora di aver risolto un problema con riga e compasso. Nel risolverlo possiamo avere:
1. *intersecato rette*. Siano $y = mx + q$ e $y = m'x + p'$ le equazioni di due rette incidenti in un certo sistema di riferimento, con m, m', p, p' appartenenti ad un certo campo $\mathbb{K}$ di numeri costruibili. Non è difficile dimostrare che l'intersezione delle due rette è un numero costruibile ovvero continua ad essere in $\mathbb{K}$;
2. *intersecato una retta e una circonferenza*. Otterremo il sistema $\begin{cases} y = mx + q \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \end{cases}$

   equivalente ad una equazione di II grado con coefficienti razionali del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ le cui soluzioni, se esistono, sono
   $$\frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   e quindi appartengono al campo $\mathbb{K}\left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)$; in generale si esce dal campo dei razionali (a meno che $b^2 - 4ac$ sia un quadrato perfetto);
3. *intersecato due circonferenze*. Il sistema, mediante riduzione, può essere ricondotto ad un altro sistema contenente l'equazione di una circonferenza e di una retta (l'asse radicale) e quindi ci si riconduce al caso precedente.

Possiamo quindi affermare che tutti i numeri costruibili si possono ottenere a partire dai parametri

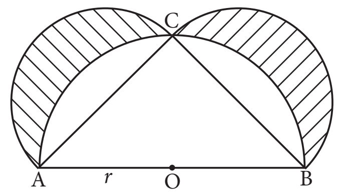
base minore assegnata, da H si innalzi un'altra perpendicolare; si tracci poi la semicirconferenza di diametro AB e sia K l'intersezione fra la semicirconferenza e la perpendicolare in H; con centro in A si tracci la circonferenza di raggio AK e sia D l'intersezione fra la circonferenza e la perpendicolare in A; da D si conduca la parallela ad AB e sia C l'intersezione fra la parallela e la retta HK; ABCD è il trapezio cercato[3].

La quadratura del triangolo è facile, e non c'è bisogno neanche della figura: tracciata un'altezza, la si biseca, poi si traccia la parallela alla base per il punto di bisezione e si innalzano dagli estremi della base le perpendicolari, il rettangolo che si forma è equivalente al triangolo dato. A questo punto possiamo concludere che anche qualsiasi poligono è quadrabile in quanto si può sempre ritagliarlo in tanti triangoli. Veniamo ora alla quadratura di figure curvilinee.

Ippocrate e la quadratura delle lunule

Ippocrate di Chio (460–380 a.C. da non confondere con Ippocrate di Coo, 460–377 a.C., il "padre" della medicina) era un mercante che, caduto nelle mani dei pirati e avendo perduto ogni bene, andò ad Atene per cercare di riottenere le sue proprietà mediante un' azione legale. Durante il lungo soggiorno frequentò le scuole dei filosofi e si dedicò allo studio della geometria. La storia non ci dice come si concluse la sua causa, ma sappiamo che Ippocrate divenne famoso per altri motivi: la quadratura delle lunule e alcuni risultati per soluzione del problema della duplicazione del cubo.

Le lunule sono regioni di piano delimitate da archi appartenenti a circonferenze differenti. Ippocrate probabilmente pensava che, avendo le lunule contorni curvi, la loro quadratura lo avrebbe portato prima o poi alla tanto agognata soluzione del problema della quadratura del cerchio. Cominciamo allora col quadrare questa semplice lunula: sia ABC un triangolo rettangolo isoscele. Si tracci la semicirconferenza di diametro AB e le semicirconferenze di diametro AC e CB. Si vengono a formare due lunule che abbiamo evidenziato con il tratteggio. Ippocrate dimostra che la somma delle superfici delle due lunule è pari alla superficie del triangolo. Infatti sia r il raggio della circonferenza per ABC; calcoliamo la somma delle superfici dei due segmenti circolari sotto le lunule, che è data dall'area della semicirconferenza di diametro AB meno quella del triangolo:



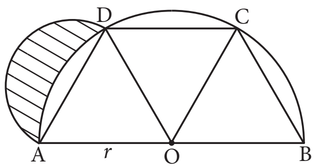
$$Aree_{seg.circ.} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{2r \cdot r}{2} = \frac{(\pi - 2)r^2}{2}$$

Ora sottraiamo dalla superficie totale delle due semicirconferenze di diametro AC e CB quelle dei due segmenti circolari: otteniamo l'area del triangolo.

$$Aree_{lun.} = \pi\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{(\pi - 2)r^2}{2} = r^2 \quad \text{c.v.d.}$$

3. Il prof. Vincenzo Carocci, coinvolto nella questione, ha trovato un'elegante soluzione analitica del problema: poniamo in A l'origine del sistema di riferimento, sia $AB = a$, $DC = b$, $AK = AD = c$, l'equazione della retta AC è: $y = cx/b$; quella per DB: $y = -cx/a + c$; per il I teorema di Euclide su AKB si ha $c^2 = ab$, se facciamo il prodotto dei coefficienti angolari delle due rette otteniamo: $-c^2/ab = -1$ ovvero la condizione di perpendicolarità.

Consideriamo ora un'altra lunula. Prendiamo una semicirconferenza di diametro AB e centro O. Inscriviamoci un trapezio isoscele ABCB con AD = DC = CB (basta tracciare la circonferenza di centro A e raggio AO). Tracciamo poi la semicirconferenza di diametro AD. Ippocrate dimostra che l'area del semicerchio di diametro AD è pari alla superficie del trapezio meno tre volte la superficie della lunula tratteggiata. Infatti l'area del trapezio vale:



$$Area(\mathrm{ABCD}) = 3 \cdot Area(\mathrm{AOD}) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

Calcoliamo l'area del segmento circolare sotto la lunula:

$$Area_{seg.circ.} = \frac{1}{3}\left(\pi\frac{r^2}{2} - \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}\right) = \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)r^2}{12}$$

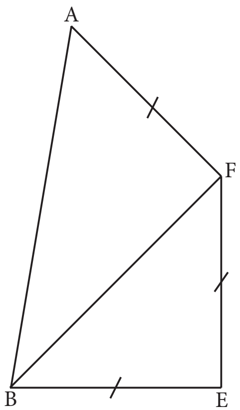
La superficie della lunula tratteggiata sarà:

$$Area_{lun.} = \frac{\pi r^2}{8} - \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)r^2}{12} = \frac{-\pi + 6\sqrt{3}}{24}r^2$$

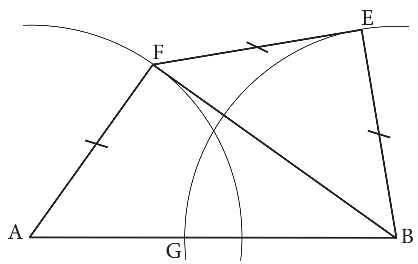
In definitiva si ha:

$$Area(ABCD) - 3Area_{lun.} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{-\pi + 6\sqrt{3}}{8}\right)r^2 = \frac{\pi}{8}r^2 \qquad \text{c.v.d.}$$

Se la lunula tratteggiata fosse stata quadrabile lo sarebbe stato anche il cerchio. Purtroppo però questa lunula è di un tipo differente da quella vista precedentemente e, come è facile immaginare, Ippocrate non riuscì mai a quadrarla.



Nel tentativo di quadrare lunule Ippocrate si cimenta anche con quelle il cui perimetro esterno è maggiore di una semicirconferenza. Consideriamo il solito triangolo rettangolo isoscele BEF; da F innalziamo la perpendicolare a FB tale che FA = FE. É facile mostrare che $AB^2 = 3AF^2$. A questo punto Ippocrate costruisce un trapezio isoscele di base AB tale che AD = DC = CB e $AB^2 = 3AD^2$. Questa costruzione è un po' complicata; ruotiamo il quadrilatero in modo da mettere AB orizzontale e tracciamo le due circonferenze di centro A e B e raggio BE. Ad occhio si intuisce che il trapezio esiste, basta muovere contemporaneamente i punti F ed E sulle circonferenze in modo da non modificare la lunghezza dei tre segmenti e far si che FE risulti parallelo ad AB. Ma in questo tipo di problemi la questione è sempre la stessa:



(AD − AB) : AB = (AB − AX′) : AX′; ma AD − AB = AX ′= AX e quindi AX : AB = XB : AX da cui la tesi.
Siamo giunti alla conclusione che a problemi geometrici trattati con riga e compasso corrispondono operazioni algebriche che si possono effettuare mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate. La procedura algebrica di solito richiede minor intuito anche se può essere lunga e laboriosa nei calcoli.

Per poter trasformare la duplicazione e la trisezione in problemi algebrici cominciamo col definire esattamente cosa intendiamo per costruzione con riga e compasso detta anche costruzione elementare.

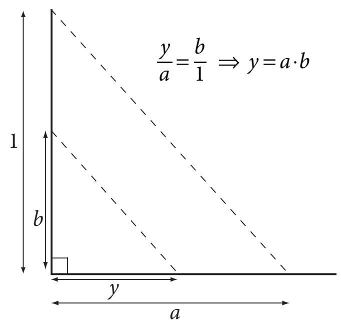
DEFINIZIONE. Una costruzione elementare è una successione finita di operazioni del tipo:
- congiungere due punti con una retta;
- tracciare una circonferenza noti il centro e il raggio;
- trovare le eventuali intersezioni tra due circonferenze, tra una circonferenza e una retta o tra due rette;
- scegliere un punto arbitrario su una retta o una circonferenza nel piano.

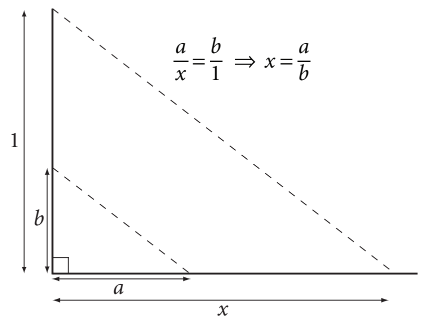
DEFINIZIONE. Un segmento è costruibile con riga e compasso se è il risultato di una costruzione elementare. Fissato un segmento di lunghezza unitaria diremo che un numero reale α è costruibile se è possibile costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza pari al valore assoluto di α.

PROPOSIZIONE. I numeri naturali sono costruibili.
dim. basta riportare il segmento *n* volte su una retta.

PROPOSIZIONE. I numeri razionali sono costruibili.
dim. supponiamo di voler costruire il razionale *m*/*n*. É sufficiente riportare su una retta, a partire da un punto arbitrario O, *m* volte il segmento unitario e dividere il segmento ottenuto in *n* parti uguali applicando il teorema di Talete.

PROPOSIZIONE. La somma, la differenza, il prodotto, il quoziente di due numeri costruibili sono costruibili.
dim. per la somma e la differenza la dimostrazione è banale per il prodotto e il quoziente basta osservare la figura seguente.





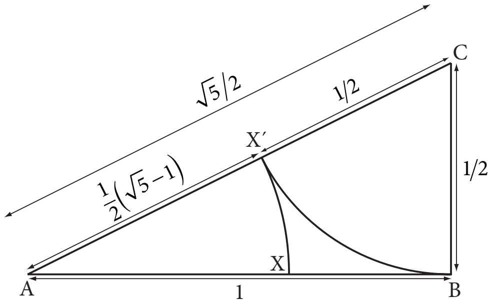
Ora, il problema è sempre lo stesso, come si dimostra che la costruzione è corretta. Vi invito a fare qualche tentativo in modo autonomo, intanto vi faccio vedere come il problema si semplifica mediante l'algebra. Sia AB = 1 e AX = x; allora la proporzione AB : AX = AX : XB diventa

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$$

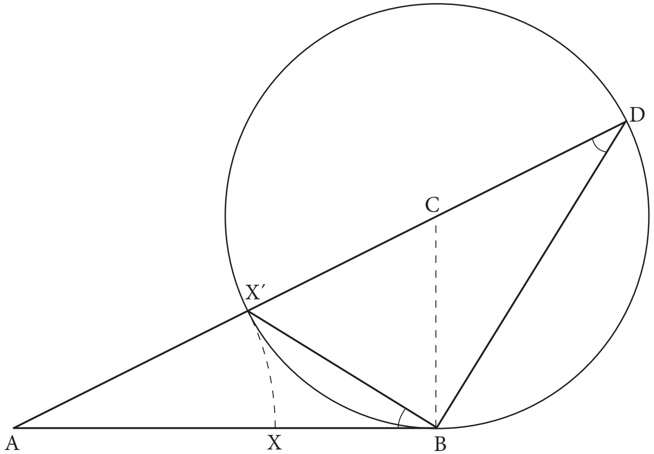
che porta all'equazione di II grado: $x^2 + x - 1 = 0$ la cui soluzione positiva vale

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Per verificare che la costruzione precedente è corretta basta allora porre l'origine del sistema di riferimento in A e determinare il raggio della circonferenza di sinistra.

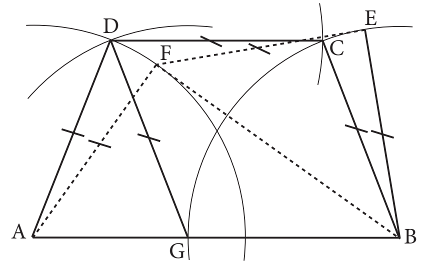


Certamente state morendo dalla voglia di sapere come si dimostra per via geometrica. Vi accontento subito: prolunghiamo AC fino ad incontrare la circonferenza in D. Guardate bene l'angolo in D e l'angolo in B evidenziati nella figura seguente

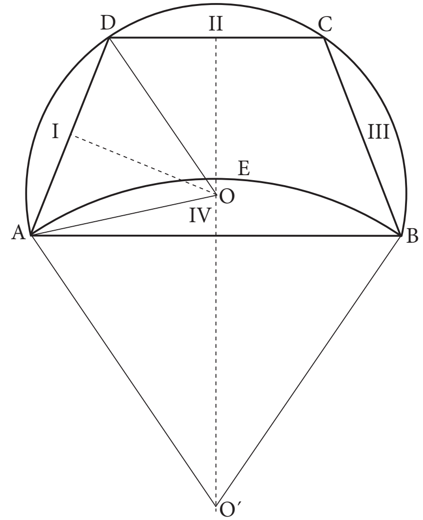


Non si direbbe ma quei due angoli sono congruenti, l'angolo in B infatti è un angolo alla circonferenza con un lato tangente e insiste sull'arco BX′ come l'angolo in D; dunque i triangoli ADB e ABX′ sono simili per cui AD : AB = AB = AX′; applicando una nota proprietà delle proporzioni si ha

come si fa con riga e compasso?



Dopo averci pensato non poco, ho trovato questa soluzione ma probabilmente ce ne sono altre più eleganti. Sia G l'intersezione della circonferenza di centro B e raggio BE con la base AB; con centro in G si tracci la circonferenza di raggio GB e sia D l'intersezione con la circonferenza di centro A e raggio AF. Con centro in D si tracci poi la circonferenza di raggio DA e sia C l'intersezione con la circonferenza di centro B. ABCD è il trapezio cercato. Per dimostrarlo è sufficiente notare che il quadrilatero GBCD è un rombo perché ha i lati tutti uguali.



Ippocrate costruì poi due archi. Il primo passa per A, D, C e B ed è l'arco della circonferenza circoscritta al triangolo ADC (si noti che questa volta non è una semicirconferenza). L'altro, l'arco AEB, è costruito in modo tale che il segmento circolare IV sia simile[4] al segmento I, per fare ciò è sufficiente tracciare AO′ parallelo a DO. Egli dimostra che la lunula limitata dagli archi AEB e ADB ha la stessa area del trapezio ABCD e quindi anch'essa è quadrabile. La dimostrazione questa volta è presto fatta. Si ricordi che tutta la costruzione è stata fatta in modo che AD = DC = CB e inoltre $AB^2 = 3AD^2$ quindi il segmento circolare IV ha una superficie tripla del segmento circolare I essendo i due segmenti simili. Le loro aree infatti sono proporzionali ai quadrati delle corde sottese.

La duplicazione del cubo

Narra una leggenda che il re Minosse avesse fatto costruire una tomba a forma di cubo per il figlio Glaudo ma quando venne a sapere che era lunga solo cento piedi in ciascuna direzione pensò che fosse troppo piccola. "Piccolo spazio invero accordaste ad un sepolcro di re, raddoppiatelo, conservandolo sempre di forma cubica" egli disse, e ordinò ai costruttori di obbedire in fretta raddoppiando i lati della tomba. É chiaro che si sbagliava: duplicando i lati una figura piana si quadruplica mentre una solida diventa otto volte. I geometri allora si misero alla ricerca di un procedimento per duplicare il volume di un solido qualunque conservandone la forma e questo problema prese il nome di duplicazione del cubo.

Un'altra leggenda collega il problema con l'isola di Delo, per cui talvolta si parla di problema di Delo. Si narra che Apollo avesse chiesto agli abitanti di Delo, attraverso un oracolo, di raddoppiare il

4. Due segmenti della stessa circonferenza o di circonferenze differenti si dicono simili se gli angoli al centro sottesi dalle loro corde sono uguali.

volume del suo altare cubico, mantenendone la forma. Quando essi si accorsero che il problema non era affatto banale, si rivolsero a Platone, il quale disse loro che Apollo aveva fatto questa richiesta non perché volesse veramente un altare doppio ma per mostrare quanto la matematica fosse importante.

Notiamo che il quadrato si duplica molto facilmente: basta tracciare la diagonale e costruirci sopra un altro quadrato. Da un punto di vista algebrico, se il lato del quadrato è di lunghezza a, si deve costruire un quadrato il cui lato abbia lunghezza x, tale che $x^2 = 2a^2$, questa equazione è equivalente alla proporzione:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{2a}$$

Si deduce che il lato del quadrato richiesto può essere costruito come la media proporzionale tra segmenti rettilinei di lunghezza a e $2a$.
Analogamente per il cubo si avrà $x^3 = 2a^3$, problema che Ippocrate ricondusse alla costruzione di due segmenti rettilinei in proporzione media continua fra segmenti a e $2a$. Ciò significa costruire due segmenti x e y in modo tale che

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Il segmento di lunghezza x risulta essere il lato del cubo cercato[5].
Non sappiamo bene come Ippocrate sia arrivato a questo risultato, possiamo pensare che egli abbia ragionato più o meno nel seguente modo:
prendiamo due cubi di lato a adiacenti uno all'altro, in modo da formare un parallelepipedo di lati 2a, a ed a, il cui volume vale quindi $2a^3$. Immaginiamo ora di trasformare questo parallelepipedo in un altro che abbia lo stesso volume e la stessa altezza a ma tale che uno dei lati di base abbia la lunghezza x richiesta. Poiché non cambiano il volume e l'altezza del solido, non cambia neppure l'area di base, quindi: $xy = 2a^2$, ovvero :

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \qquad (1)$$

Supponiamo ora di trasformare il solido così ottenuto in un terzo solido a forma di cubo, sempre con lo stesso volume, ma con i lati tutti uguali ad x. La faccia laterale di lati a e y deve trasformarsi in un quadrato di lato x con la stessa superficie. Quindi: $x^2 = ay$, ovvero

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \qquad (2)$$

Dalle espressioni (1) e (2) segue che:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

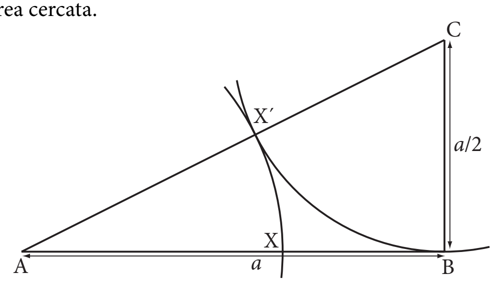
Il problema della duplicazione del cubo, comunque, non è affatto risolto: la scoperta di Ippocrate serve soltanto a trasformare il problema originale in un altro differente che consiste nella costruzione di due medie proporzionali fra segmenti rettilinei di lunghezza a e $2a$. Come ormai è chiaro il problema non è risolubile con l'utilizzo esclusivo di riga e compasso. In effetti, nel cercare di risolverlo, i greci fecero uso di altre curve o di strumenti diversi dalla riga e dal compasso. Vediamo un paio di queste soluzioni.

5. per dimostrarlo si ricava y dai primi due termini della proporzione e si sostituisce negli altri due.

2. La dimostrazione dell'impossibilità delle costruzioni

Come abbiamo accennato i tre problemi classici vennero "risolti" nel diciannovesimo secolo. La trisezione e la duplicazione nel 1837 per opera di Wantzel, la quadratura invece più tardi, nel 1882 dal matematico tedesco Ferdinand von Lindemann (1852–1939). In tutti i casi la "soluzione" si rivelò una dimostrazione che la costruzione ricercata era impossibile. Per la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo le dimostrazioni fanno riferimento a concetti algebrici del tutto sconosciuti agli antichi greci, in particolare si fa uso di risultati della teoria delle equazioni di terzo grado. La dimostrazione della impossibilità della quadratura del cerchio è ancora più complessa e si basa sulla trascendenza del numero π.

Come avrete intuito le dimostrazioni di impossibilità fanno uso dell'algebra. Abbiamo visto all'inizio della dispensina che a volte le dimostrazioni per via puramente geometrica non sono affatto banali; un metodo molto efficace consiste proprio nel trasformarle in problemi di geometria analitica e affrontare le questioni da un punto di vista algebrico. L'algebra è uno strumento estremamente potente e manipolare numeri e lettere ci risulta più facile che osservare figure geometriche: la ricerca della soluzione passa dall'intuizione quasi magica di mostrare che due angoli sono uguali al problema tecnico di risolvere un'equazione parametrica. Facciamo un esempio, che è sempre la cosa migliore. Consideriamo la famosa sezione aurea di un segmento; i greci adoravano questo problema, Keplero dice: "La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la divisione di un segmento secondo il rapporto medio ed estremo". Il linguaggio è sempre lo stesso, i greci non possedendo l'algebra facevano tutto con le proporzioni[1]:
sia dato un segmento AB, la sezione aurea è il segmento AX tale che AB : AX = AX : XB.
La costruzione è la seguente: sia AB il segmento, costruiamo il triangolo rettangolo ABC (con l'angolo in B retto) tale che BC sia pari a AB/2 (mi raccomando, bisogna farlo con riga e compasso, mica con la squadra). Con centro in C tracciamo la circonferenza di raggio CB e sia X′ l'intersezione con l'ipotenusa AC. Con centro in A tracciamo la circonferenza di raggio AX′ e sia X l'intersezione con AB. AX è la sezione aurea cercata.



1. Più o meno come si fa in seconda media.

zione con AD e con la quadratrice DE. Era noto a Dinostrato che archi corrispondenti di cerchi stanno tra loro come i rispettivi raggi, per cui

$$\frac{\widehat{DB}}{l}=\frac{\widehat{PQ}}{r}$$

Da questa proporzione e dalla (6) si ottiene

$$\widehat{PQ}=l \quad (7)$$

Si abbassi da R la perpendicolare RH su AB. R è un punto della quadratrice quindi soddisfa le condizioni dell'equazione (5) ovvero $\alpha : 90° = d : l$ da cui

$$\frac{\widehat{PR}}{\widehat{PQ}}=\frac{d}{l}$$

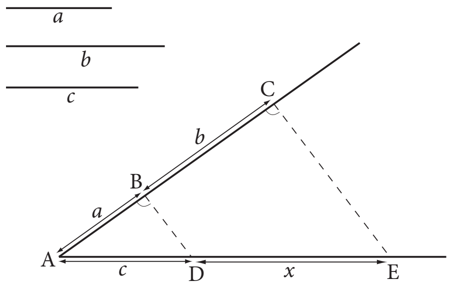
Sostituendo nella precedente formula la (7) si conclude che

$$\widehat{PR}=d$$

Risultato evidentemente assurdo in quanto la perpendicolare RH ad AB è la più breve di tutte le linee. Se ne deduce che l'ipotesi (6) di partenza è falsa. Come al solito si lascia al lettore la dimostrazione della falsità dell'altra ipotesi.
La tesi a cui siamo giunti può essere scritta nella forma

$$\frac{AE}{l}=\frac{l}{\widehat{DB}}$$

ovvero una proporzione che contiene 3 segmenti rettilinei e l'arco circolare DB. A questo punto mediante una semplice costruzione geometrica, si può facilmente tracciare un segmento che sia uguale in lunghezza all'arco DB. Nella figura seguente viene esplicitata la costruzione per trovare il quarto termine di una generica proporzione, il metodo è sempre quello di utilizzare il teorema di Talete.

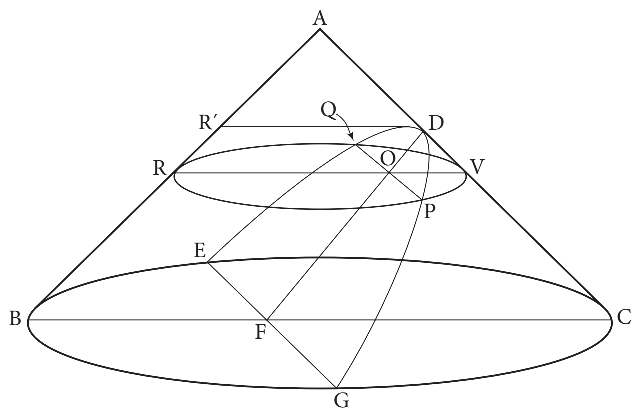


Una volta tracciato un segmento pari alla lunghezza dell'arco DB disegniamo un rettangolo colla base lunga il doppio dell'arco DB e altezza uguale a l. Questo rettangolo ha evidentemente superficie pari a πl^2, basta quadrarlo con la procedura vista a pag. 2 e il gioco è fatto.
Naturalmente era ben chiaro agli antichi greci che l'uso di questa curva violava le regole del gioco; il punto E infatti non può essere determinato con riga e compasso. Questo punto può solo essere approssimato con bisezioni successive degli angoli di lato AB e dei corrispondenti segmenti di AD in modo da costruire punti della quadratrice sempre più vicini ad E.

La soluzione di Menecmo

Sappiamo che Menecmo (ca. 380–320 a.C.) fu il maestro di Alessandro Magno, e la leggenda gli attribuisce il celebre aneddoto in risposta alla richiesta del suo regale discepolo di qualche "scorciatoia" per imparare più rapidamente la geometria: "Mio re, per viaggiare attraverso il paese ci sono strade per i re e strade per i cittadini comuni, ma nella geometria c'è un sola strada per tutti[6]". A Menecmo viene riconosciuto il merito di aver scoperto le sezioni coniche ovvero le curve che si ottengono tagliando un cono circolare retto mediante un piano perpendicolare a un elemento del cono. Queste curve, note a qualsiasi studente, vengono oggi trattate come rappresentazione grafica di equazioni di II grado e sono: l'ellisse, la parabola e l'iperbole. Si tenga presente però che il concetto di equazione era sconosciuto agli antichi greci i quali le studiarono da un punto di vista squisitamente geometrico. Menecmo partì da un cono circolare retto con un angolo rettangolo al vertice (ovvero la cui generatrice abbia un angolo di 45°). Egli trovò che, quando il cono viene tagliato da un piano perpendicolare a una delle rette generatrici, l'intersezione è rappresentata, in termini di moderna geometria analitica, da una equazione del tipo $y^2 = lx$, dove l è una costante che dipende dalla distanza del piano di intersezione dal vertice. Proviamo a dimostrare queste proprietà: consideriamo un cono ABC (con vertice in A) e seghiamolo con un piano perpendicolare alla retta ADC del cono; sia EDG la curva intersezione. Si prenda ora un punto P qualsiasi della curva e si intersechi il cono con un piano orizzontale che lo seghi nella circonferenza PVR; sia Q l'altro punto di intersezione della curva con la circonferenza. Per motivi di simmetria PQ è perpendicolare a RV quindi OP è medio proporzionale tra i segmenti RO e OV. Inoltre, dalla similitudine dei triangoli OVD e BCA segue che OV : DO = BC : AB, e dalla similitudine dei triangoli R′DA e ABC segue che R′D : AR′ = BC : AB. Allora, se le coordinate del punto P sono OP = y e OD = x si ha y^2 = RO·OV ovvero, sostituendo i termini uguali,

$$y^2 = R'D \cdot OV = AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot DO \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2} \cdot x$$



6. Si dubita dell'autenticità di questa leggenda perché una simile è attribuita a Euclide e al re Tolomeo I.

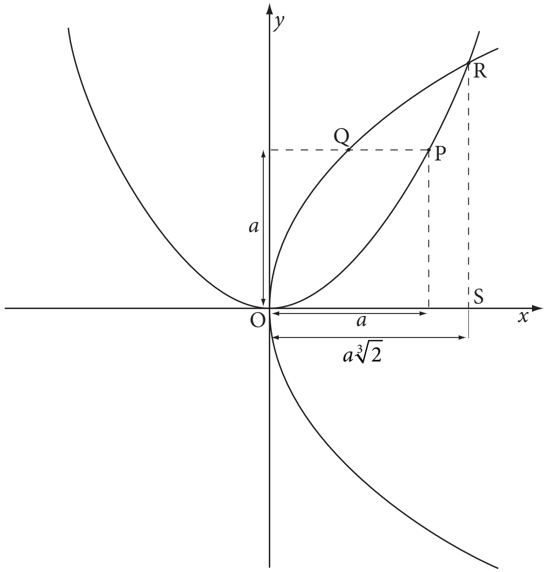
Considerato che i segmenti AR′, BC e AB sono gli stessi per tutti i punti della curva in questione, possiamo dire che essa è una parabola in quanto l'equazione che la rappresenta è del tipo $y^2 = lx$ dove l è una costante che sarà chiamata *latus rectum*.
Torniamo adesso al problema della duplicazione del cubo. Ippocrate era arrivato a

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

dalla prima eguaglianza segue che $x^2 = ay$ cioè $y=\frac{1}{a}x^2$ (3);

dalla seconda si ottiene invece $y^2 = 2ax$ cioè $x=\frac{1}{2a}y^2$ (4).

Le equazioni (3) e (4) rappresentano due belle parabole entrambe con vertice nell'origine, la prima con asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate e la seconda con quello delle ascisse. Il punto P di coordinate $(a; a)$ appartiene alla prima parabola e può essere costruito con riga e compasso dato che conosciamo la lunghezza del lato del cubo che vogliamo duplicare. Il punto Q di coordinate $(a/2; a)$ appartiene invece alla seconda parabola; in definitiva le due parabole sono completamente determinate in quanto ne conosciamo il vertice, l'asse di simmetria e un punto.



I punti di intersezione delle due parabole si trovano risolvendo il sistema corrispondente che diventa:

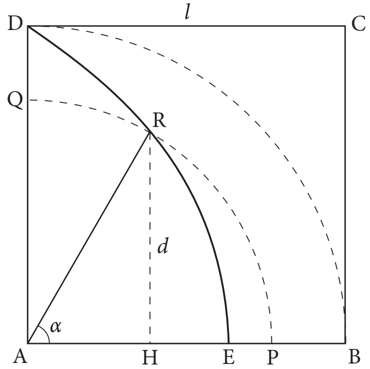
$$x^4-2a^3x=0$$

Questa equazione ha due soluzioni reali 0 e $a\sqrt[3]{2}$. Sia R la soluzione non banale, abbassiamo la perpendicolare da R sull'asse x e sia S il piede di tale perpendicolare. Il segmento OS vale $a\sqrt[3]{2}$ ed è proprio il lato di un cubo di volume $2a^3$.

1. Si costruisca un quadrato ABCD in modo tale che la semiretta AF si trovi internamente.
2. Si tracci (in qualche modo) la trisettrice DE e sia X l'intersezione con AF.
3. Si tracci XG parallelo a BA.
4. Si trisechi il segmento GA determinando il punto H su AD.
5. Da H si tracci la parallela a GX che interseca la trisettrice in Y.
6. Si tracci AY.

L'angolo BAY è l'angolo cercato.

Mentre Menecmo si dedicava la problema della duplicazione del cubo il fratello, Dinostrato (390–320 a.C.), scoprì un'interessante proprietà del punto terminale E della trisettrice di Ippia che può essere utilizzata per quadrare il cerchio; da allora la curva divenne più comunemente nota col nome di quadratrice.



Egli mostra che, se l è il lato del quadrato, la lunghezza del segmento AE vale $2l/\pi$. Per gli studenti del V anno, a cui non dovrebbe essere sconosciuta un po' di analisi matematica, la dimostrazione è semplice. Se nell'equazione (5) che caratterizza la trisettrice, sostituiamo $d = \mathrm{AR}\cdot\mathrm{sen}\alpha$, portiamo in radianti e facciamo il limite per $\alpha \to 0$ otteniamo:

$$\mathrm{AE}=\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{AR}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2l}{\pi}\frac{\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}=\frac{2l}{\pi}$$

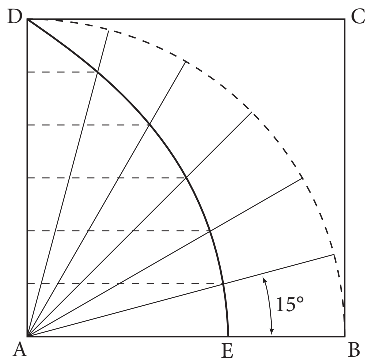
I greci non conoscevano l'algebra, figuriamoci l'analisi; la dimostrazione di Dinostrato si basa esclusivamente su considerazioni di geometria elementare. Nel solito linguaggio delle proporzioni egli mostra che il lato l del quadrato è medio proporzionale tra il segmento AE e l'arco del quarto di cerchio DB, ovvero $\widehat{\mathrm{DB}} : l = l : \mathrm{AE}$.
Dinostrato ricorre una dimostrazione per assurdo, tipica del pensiero matematico greco, facendo vedere che $\widehat{\mathrm{DB}}/l$ non può essere né minore né maggiore di l/AE. Cominciamo col dimostrare che $\widehat{\mathrm{DB}}/l$ non è minore di l/AE. Supponiamo per assurdo che lo sia, ovvero che

$$\frac{\widehat{\mathrm{DB}}}{l}=\frac{l}{r} \quad (6)$$

con r > AE. Poiché $\widehat{\mathrm{DB}} > l$ dalla proporzione (6) si ottiene $l > r$; in definitiva, $l > r >$ AE; ciò significa che vi è un segmento AP di lunghezza r tale che AB > AP > AE.
Tracciamo ora il quarto di circonferenza con centro A e raggio r. Siano Q e R i suoi punti di interse-

Ippia e la quadratura del cerchio

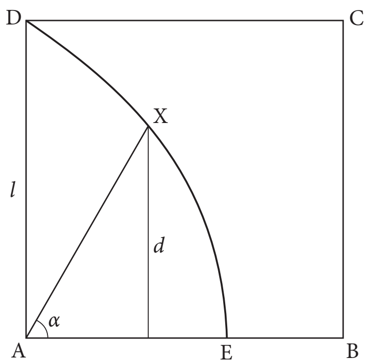
Il sofista Ippia (ca. 443 –339 a.C.) inventò una curva chiamata trisettrice mediante la quale è possibile risolvere sia il problema della trisezione dell'angolo che quello della quadratura del cerchio. Si consideri il seguente quadrato ABCD.

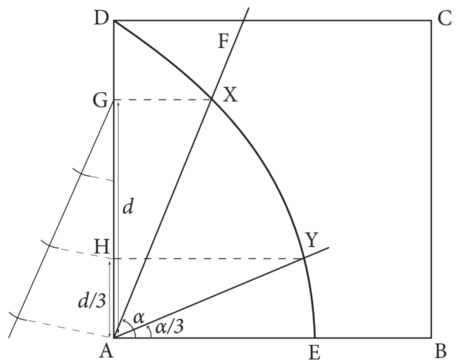


Un segmento AB inizialmente coincide con AB e ruota, con centro in A, fino a portarsi in AD. Un secondo segmento, anch'esso inizialmente coincidente con AB, trasla in direzione verticale, dal basso verso l'alto, rimanendo parallelo ad AB, fino a portarsi in DC. Il primo segmento ruota a velocità angolare costante mentre il secondo trasla a velocità lineare costante; i due segmenti partono e arrivano nello stesso istante quindi, quando il segmento che ruota ha percorso un angolo di 15°, quello che trasla ha fatto un sesto del percorso totale. In ogni istante del loro movimento simultaneo i due segmenti hanno un punto di intersezione: la curva trisettrice è l'insieme di tutti questi punti. É facile mostrare che, se X è un punto qualsiasi della trisettrice, la distanza di X dal lato AB del quadrato è proporzionale all'angolo XAB ovvero (si veda la figura seguente) se chiamiamo l il lato del quadrato, d la distanza e α l'angolo, si ha:

$$\frac{\alpha}{90°}=\frac{d}{l} \quad (5)$$

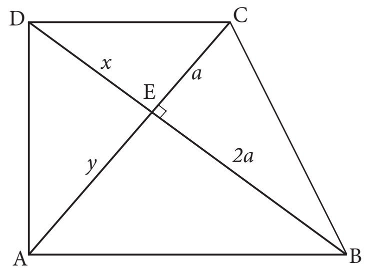
Vediamo ora come si triseca un angolo usando la trisettrice. Si osservi la figura seguente, quella di destra; sia BAF l'angolo che si vuole trisecare. La procedura è la seguente:





Si tenga presente che, per quanto il problema sembra risolto, la soluzione non è stata ottenuta facendo uso soltanto di riga e compasso dal momento che le parabole non possono essere costruite con tali strumenti.

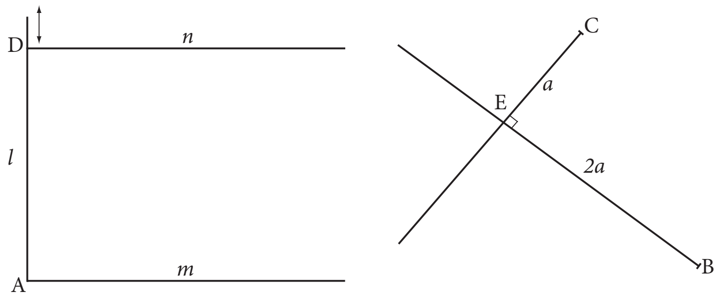
La soluzione di Platone



Sia ABCD un trapezio rettangolo con le diagonali perpendicolari che si intersecano nel punto E. Se EC = a, EB = $2a$, ED = x ed EA = y è facile mostrare, considerando la similitudine dei triangoli rettangoli in cui resta diviso il trapezio, che

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

la quale non è altro che la proporzione media continua di Ippocrate.
Vi sfido a tentare la costruzione del trapezio con riga e compasso, non c'è verso di riuscirci in alcun modo; eppure è chiaro che il trapezio esiste; Platone (428–348 a.C.) riesce a disegnarlo escogitando il seguente astuto marchingegno (molto poco platonico).



Nella figura in alto a sinistra l'asta n può scorrere verticalmente, ma rimane perpendicolare ad l, mentre l'asta m è rigidamente connessa ad l sempre perpendicolarmente. Sulla destra invece vi sono due aste disposte a croce bloccate ad angolo retto in modo che EC = a ed EB = $2a$, dove a è la lunghezza del cubo che si vuole duplicare. Questa croce deve essere messa sopra le due aste m e n in modo tale che il punto C si trovi su n, B sia su m, il prolungamento di CE passi per A e quello di BE passi per il punto di intersezione D di l e

n. Con opportuni scorrimenti dell'asta *n* e rotazioni delle aste disposte a croce il trapezio cercato può essere individuato e allora ED risulta proprio uguale al lato del cubo di volume doppio.
Si osservi ancora una volta che la costruzione ha fatto uso di strumenti non concessi dalla restrizione platonica. Soluzioni di questo tipo, che comportano lo scorrimento e la rotazione di aste graduate, erano chiamate *neusis* (νεῦσις) ovvero soluzioni mediante inclinazione.

La trisezione dell'angolo

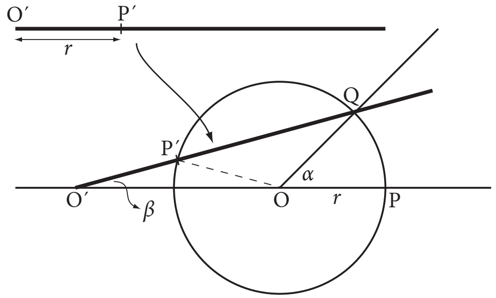
Agli antichi greci piaceva molto costruire angoli di ampiezza assegnata. Partendo dalla costruzione di pochi angoli fondamentali, come quelli di 60° (l'angolo di un triangolo equilatero) e 108° (l'angolo di un pentagono regolare), essi erano in grado di costruire altri angoli applicando una o più volte i seguenti procedimenti:

1. Sommare due angoli dati.
2. Sottrarre un angolo dato da un altro.
3. Bisecare un angolo assegnato.

Ad esempio un angolo di 75° può essere ottenuto bisecando due volte un angolo di 60° e sommandolo poi ad un altro di 60°. É probabile che questo gioco porti prima o poi a chiedersi se sia possibile trisecare un angolo (in modo da poter costruire ad esempio un angolo di 20°). Ora, questo problema per quanto riguarda i segmenti è banale, il teorema[1] di Talete infatti permette di dividere un segmento non solo in tre parti ma in tutte quelle che vogliamo, e quindi non c'è motivo per aspettarsi che per gli angoli intervengano problemi particolari. Invece l'impresa, apparentemente semplice, resiste a qualsiasi tentativo: con la riga e il compasso si possono trisecare solo particolari angoli (come quello retto o quello piatto) ma non esiste alcuna procedura generale. La dimostrazione di questo fatto è dovuta al matematico francese Pierre–Laurent Wantzel (1814–1848) che nel 1837 pubblica un articolo dal titolo: *Ricerca sui metodi per riconoscere se un problema può essere risolto con riga e compasso,* dove individua un criterio di non-costruibilità chiamato in seguito Teorema di Wantzel.
Come al solito se si abbandonano le regole del gioco e si ricorre ad altri metodi, come ad esempio soluzioni mediante inclinazione, la trisezione è possibile. Vediamo un paio di esempi: quello di Archimede (287–212 a.C.) e quello di Nicomede (ca. 280–210 a.C.).

La soluzione di Archimede

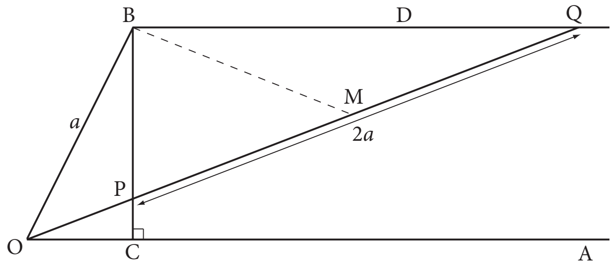
Sia α l'angolo da trisecare. Con centro nel vertice O si tracci una circonferenza di raggio arbitrario r individuando i punti P e Q sulle due semirette di α. Prolunghiamo OP dalla parte di O; sulla riga segniamo un segmento O′P′ uguale al raggio r; a questo punto, con la riga non più intonsa, tracciamo il segmento passante per Q tale che P′ si mantenga sulla circonferenza e O′ sul prolungamento di OP.



É facile mostrare che l'angolo β = OO′P′ è un terzo di α. Infatti, il triangolo P′O′O è isoscele e quindi l'angolo esterno QP′O sarà pari a 2β; ma anche il triangolo P′QO è isoscele per cui l'angolo al vertice P′OQ vale $180° - 4\beta$; da ciò segue immediatamente che l'angolo α è pari a 3β.

La soluzione di Nicomede

Si consideri la seguente figura. AOB è l'angolo che deve essere trisecato. Sia OB = a. Il segmento BC è perpendicolare alla semiretta OA e la semiretta BD è parallela alla semiretta OA. Abbiamo poi tracciato un segmento OQ che interseca BC in P, in modo tale che PQ = $2a$. Allora è facile[2] dimostrare che l'angolo AOQ è un terzo dell'angolo AOB.



Il procedimento mediante inclinazione richiede che su una riga si segni un segmento PQ = $2a$, si deve poi far scorrere P su BC e Q su BD fino a quando la riga non passi per O.

1. Da un estremo del segmento AB si tracci una semiretta sulla quale si distendano un numero di segmenti uguale al numero di parti in cui si vuole dividere il segmento AB, individuando i punti P_1, P_2, ..., P_n. Dall'ultimo punto si tracci il segmento BP_n. Le parallele al segmento passanti per P_1, P_2, ..., individuano sul segmento AB i punti A_1, A_2 che dividono il segmento nel numero di parti cercate.

2. Ecco la classica dimostrazione per intimidazione che in verità non è affatto banale. Il testo di riferimento [Bunt] suggerisce di unire il punto B con il punto medio M di PQ. La situazione migliora perché intuiamo che i triangoli BMQ e OBM sono isosceli, ma come dimostrarlo? Il Bunt tace e anch'io ho dovuto pensarci un po'. Poi mi è venuta l'illuminazione di costruire la circonferenza di diametro PQ, con questo stratagemma la dimostrazione si fa accessibile. Sia α = AOQ; l'angolo BQO = α perché alterno interno, l'angolo BMO vale 2α perché esterno del triangolo BMQ; segue quindi che BOQ = 2α in quanto il triangolo OMB è isoscele.