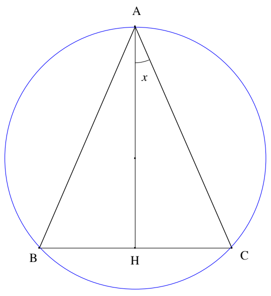
problemi di max e min (prof. M. Savarese)

1 A Fra i triangoli isosceli inscritti in un cerchio di raggio r, si determini quello di area massima.



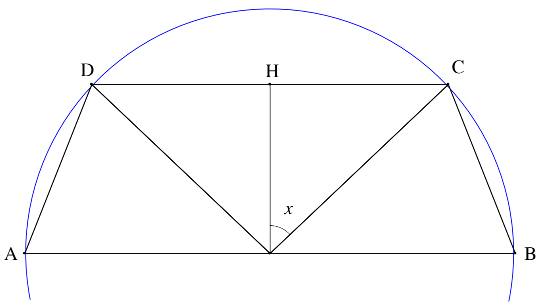
$x \equiv C\hat{A}H;\ 0<x<90°;\ A\hat{B}C = 90°-x;\ AC = 2r\,\mathrm{sen}(90°-x) = 2r\cos x$ (teorema della cord

$A(x)=\frac{1}{2} AC^2\, \mathrm{sen}\,2x = 4r^2\, \mathrm{sen}\,x\cos^3 x;\ A'(x)=0 \Rightarrow \cos^4 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x=0 \Rightarrow$

$\cos^2 x(\cos^2 x-3\,\mathrm{sen}^2 x)=0 \Rightarrow \mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=30°$

anche ponendo come incognita l'altezza AH, record 422

2 A Inscrivere in una semicirconferenza di raggio R il trapezio di area massima.

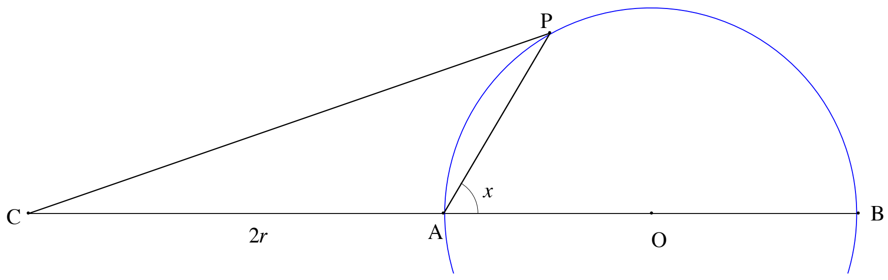


$h=r\cos x;\ b=2r\,\mathrm{sen}\,x;\ A(x)=\frac{B+b}{2}h = r^2(1+\mathrm{sen}\,x)\cos x;\ A'(x)=0 \Rightarrow$

$\cos^2 x-(1+\mathrm{sen}\,x)\mathrm{sen}\,x=0 \Rightarrow 1-\mathrm{sen}^2 x-\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}^2 x=0 \Rightarrow$

$2\mathrm{sen}^2 x+\mathrm{sen}\,x-1=0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\begin{cases}-1\\1/2\end{cases} \Rightarrow x=30°$

3 A Data una semicirconferenza di diametro AB uguale $2r$, si tracci esternamente ad essa un segmento CA adiacente al diametro e a esso congruente. Detto P un punto sulla semicirconferenza si determini l'angolo BAP in modo che sia massima la somma delle aree del quadrato di lato CP e del rettangolo di lati AB e BP.

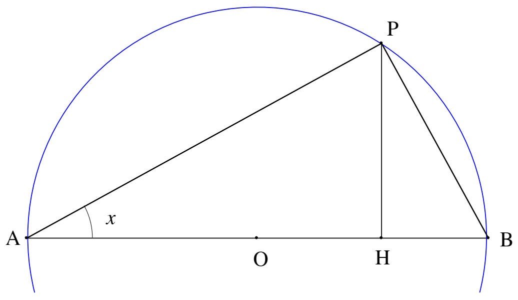


$AP=2r\cos x;\ \ CP^2=4r^2+4r^2\cos^2 x-2\cdot 2r\cdot 2r\cos x(-\cos x)$

$y(x)=CP^2+AP\cdot BP=4r^2(1+3\cos^2 x+\mathrm{sen}\,x);\ y'(x)=0 \Rightarrow -6\cos x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x=0$

$\mathrm{sen}\,x=\frac{1}{6} \Rightarrow x=\mathrm{arcsen}\frac{1}{6}$

4 A Nell'insieme dei triangoli rettangoli inscritti in una semicirconferenza di raggio r, determina quello per il quale è massima la somma della proiezione di un cateto sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa.



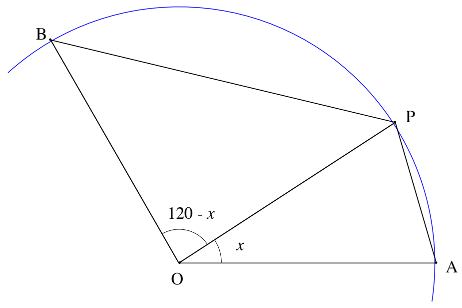
$AP=2r\cos x;\ \ PH=AP\,\mathrm{sen}\,x=2r\,\mathrm{sen}\,x\cos x;\ \ HB=2r-AH=2r(1-\cos^2 x)=2r\,\mathrm{sen}^2 x$

$y(x)=HB+PH=2r(\mathrm{sen}\,x\cos x+\mathrm{sen}^2 x)=2r\,\mathrm{sen}\,x(\cos x+\mathrm{sen}\,x)$

$y'(x)=0 \Rightarrow \cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x+2\,\mathrm{sen}\,x\cos x=0 \Rightarrow \mathrm{tg}^2 x-2\,\mathrm{tg}\,x-1=0 \Rightarrow$

$\mathrm{tg}\,x=1\pm\sqrt{2}=\begin{cases}1-\sqrt{2} & \text{no}\\1+\sqrt{2}\end{cases}\quad x=67{,}5°$

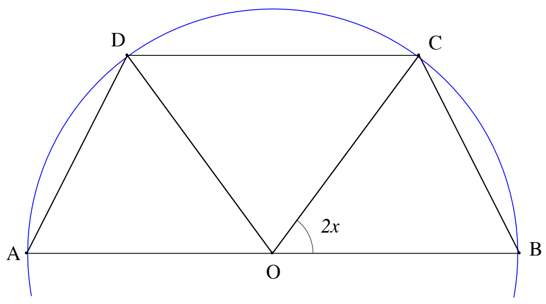
1 B Sull'arco AB di un settore circolare di raggio r, centro O e ampiezza $2\pi/3$, si prenda un punto P in modo che l'area del quadrilatero $AOBP$ sia massima.



$x \equiv A\hat{O}P;\ A(x)=\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{sen}\,x+\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{sen}(120°-x)=r^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x+\frac{1}{4}(\sqrt{3}\cos x+\mathrm{sen}\,x)\right)=$

$=\frac{r^2}{4}(3\,\mathrm{sen}\,x+\sqrt{3}\cos x);\ A'(x)=0 \Rightarrow 3\cos x-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x=0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,x=\sqrt{3} \Rightarrow x=60°$

2 B Inscrivere in una semicirconferenza di raggio R il trapezio di perimetro massimo.

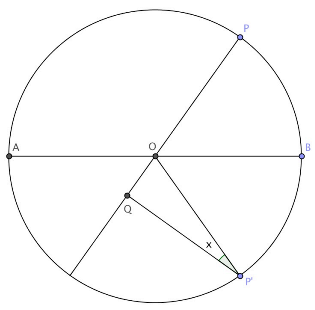


$CD=2r\,\mathrm{sen}(90-2x)=2r\cos 2x;\ \ CB=2\,\mathrm{sen}\,x$

$P(x)=2r+4r\,\mathrm{sen}\,x+2r\cos 2x;\ P'(x)=0 \Rightarrow 2\cos x-2\,\mathrm{sen}\,2x=0 \Rightarrow$

$\cos x(1-2\,\mathrm{sen}\,x)=0 \Rightarrow x=30°$

3 B Dato un cerchio di raggio r si determinino sulla circonferenza due punti P e P' simmetrici rispetto al diametro AB in modo che, chiamata Q la proiezione di P' sul diametro passante per P, sia massima l'area del triangolo $PP'Q$. (si indichi con x l'angolo OP′Q)



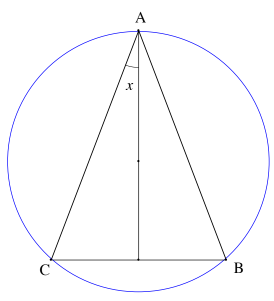
$P'Q=r\cos x;\ \ OQ=r\,\mathrm{sen}\,x;\ \ QP=r+r\,\mathrm{sen}\,x=r(1+\cos x)$

$A(x)=P'Q\cdot QP=r^2\cos x(1-\mathrm{sen}\,x);\ A'(x)=0 \Rightarrow -\mathrm{sen}\,x(1+\mathrm{sen}\,x)+\cos^2 x=0 \Rightarrow$

$-\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}^2 x+1-\mathrm{sen}^2 x=0 \Rightarrow 2\,\mathrm{sen}^2 x+\mathrm{sen}\,x-1=0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,x=\frac{-1\mp\sqrt{9}}{4}=\begin{cases}-1\\1/2\end{cases}=$

$x=30°;\ P'\hat{O}B=45°+x/2=60°$

4 B Nell'insieme dei triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello la cui somma della altezza AH e della base BC è massima.

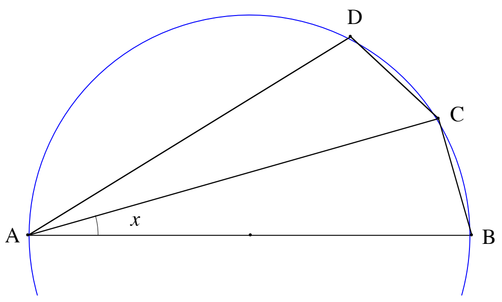


$AC=2r\cos x;\ \ AH=AC\cos x=2r\cos^2 x;\ \ BC=2r\,\mathrm{sen}\,2x$

$y(x)=AH+BC=2r(\cos^2 x+\mathrm{sen}\,2x);\ y'(x)=0 \Rightarrow -2\cos x\,\mathrm{sen}\,x+2\cos 2x=0 \Rightarrow$

$\mathrm{sen}\,2x=2\cos 2x \Rightarrow \mathrm{tg}\,2x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\arctan 2$

5 A Data una semicirconferenza di diametro AB uguale $2r$, si conduca una corda AD e sia C il punto medio dell'arco BD. Si determini l'angolo BAC il modo che l'area del quadrilatero ABCD sia massima.



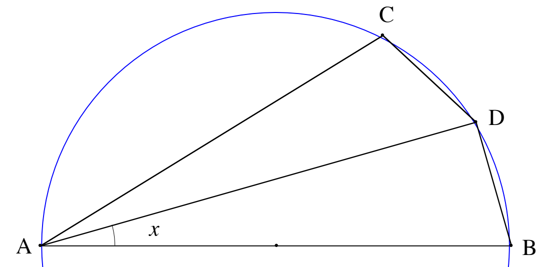
$DC = CB = 2r\,\mathrm{sen}\,x;\ \ AC = 2r\cos x;\ \ AD = 2r\cos 2x;\ \ A_1 = \frac{1}{2}2r\cdot 2r\cos x\,\mathrm{sen}\,x$

$A_2 = \frac{1}{2}2r\cos x\cdot 2r\cos 2x\cdot \mathrm{sen}\,x = 2r^2\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right)\mathrm{sen}\,x;\ \ A(x) = A_1 + A_2 =$

$2r^2\left(\cos x\,\mathrm{sen}\,x\cdot 2\cos^2 x\right) = 4r^2\cos^3 x\,\mathrm{sen}\,x;\ \ A'(x) = 0 \ \Rightarrow\ -3\cos^2 x\,\mathrm{sen}^2 x + \cos^4 x = 0 \ =$

$\cos^2 x\left(-3\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x\right) = 0 \ \Rightarrow\ -3\mathrm{sen}^2 x + 1 - \mathrm{sen}^2 x = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{sen}^2 x = 1/4 \ \Rightarrow\ x = 30'$

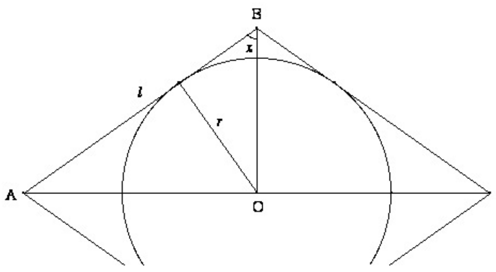
5 B In una semicirconferenza di diametro AB uguale $2r$ si individui un punto C in modo che, se D è il punto medio dell'arco BC, risulti massima la somma AC + DB.



$AC = 25\cos 2x = 2r\left(2\cos^2 x - 1\right);\ \ DB = 2r\,\mathrm{sen}\,x;\ \ y(x) = AC + DB = 2\cos^2 x - 1 + \mathrm{sen}\,x$

$y'(x) = 0 \ \Rightarrow\ -4\cos x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x = 0 \ \Rightarrow\ \cos x\left(-4\,\mathrm{sen}\,x + 1\right) = 0 \ \Rightarrow\ x = \mathrm{arcsen}\frac{1}{4}$

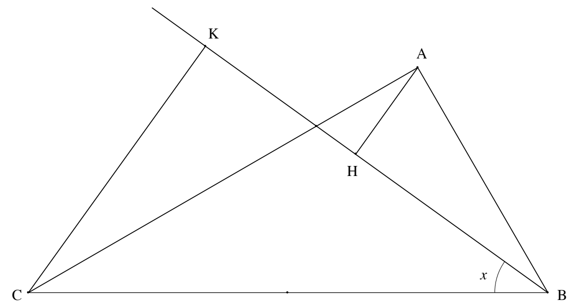
6 A Fra tutti i rombi circoscritti a un cerchio di raggio r, si determini quello di perimetro minimo.



$OB = l\cos x;$ l'area di del triangolo ABO è: $\frac{1}{2}l\cdot l\cos x\cdot\mathrm{sen}\,x,$ ma anche $\frac{1}{2}l\cdot r$, da cui

$r = 2l\,\mathrm{sen}\,2x;\ \ P(x) = \frac{8r}{\mathrm{sen}\,2x};\ \ P'(x) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{-2\cos 2x}{\mathrm{sen}^2\,2x} = 0 \ \Rightarrow\ \cos 2x = 0 \ \Rightarrow\ x = 45°$

6 B Sia ABC un triangolo rettangolo con ipotenusa BC e angolo ABC pari a $\pi/3$. Si tracci una semiretta uscente da B e appartenente all'angolo ABC in modo che, dette H e K le proiezioni ortogonali su di essa di A e C, la somma delle misure dei segmenti AH e CK sia massima.



$AB = \frac{l}{2};\ \ AH = \frac{l}{2}\mathrm{sen}\left(60 - x\right) = \frac{l}{4}\left(\sqrt{3}\cos x - \mathrm{sen}\,x\right);\ \ CK = l\,\mathrm{sen}\,x$

$y(x) = AH + CK = \frac{l}{4}\left(\sqrt{3}\cos x + 3\,\mathrm{sen}\,x\right);\ \ y'(x) = 0 \ \Rightarrow\ -\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x = 0 \ \Rightarrow$

$\mathrm{tg}\,x = \sqrt{3} \ \Rightarrow\ x = 60°$

7 A Si vuole costruire un aquilone a forma di settore circolare con una superficie che misura 8 m^2. Si determini l'angolo α del settore in modo che il contorno dell'aquilone sia minimo.

$S = \pi r^2\frac{\alpha}{2\pi}\quad r = \sqrt{\frac{2S}{\alpha}};\ \ \alpha \equiv \frac{\widehat{AB}}{r} \ \Rightarrow\ \widehat{AB} = \alpha r;$

$f(\alpha) = 2r + \alpha r = \sqrt{\frac{2S}{\alpha}}\left(\alpha + 2\right) = \sqrt{2S}\,\frac{\alpha + 2}{\sqrt{\alpha}};\ f'(\alpha) = 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{\alpha} - \frac{\left(a + 2\right)}{2\sqrt{\alpha}} = 0 \ \Rightarrow$

$2\alpha - \left(\alpha + 2\right) = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = 2$

7 B Si vuole costruire un aquilone a forma di settore circolare con un contorno lungo 3 m. Si determini l'angolo α del settore in modo che la superficie sia massima.

$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r};\ \ 3 = 2r + \alpha r \ \Rightarrow\ r = \frac{3}{2 + \alpha};\ \ S(\alpha) = \pi r^2\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{9}{2}\frac{\alpha}{\left(\alpha + 2\right)^2};\ \ S'(\alpha) = 0 \ \Rightarrow$

$\left(2 + \alpha\right)^2 - 2\alpha\left(2 + \alpha\right) = 0 \ \Rightarrow\ \left(2 + \alpha\right) - 2\alpha = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = 2$

8 A Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S pari a 10 dm^2 (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

2008 ordin 3

$S = \pi r^2 + 2\pi rh \ \Rightarrow\ h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}$

$V(r) = \pi r^2\frac{S - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}\left(S - \pi r^2\right) = \frac{rS}{2} - \frac{\pi}{2}r^3$

$V'(r) = \frac{S}{2} - \frac{3}{2}\pi r^2 \ \Rightarrow\ V'(r) = 0 \ \Rightarrow\ r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = 10{,}3\ \mathrm{cm}$

8 B I dirigenti di una fabbrica di birra si accorgono che le loro lattine costano troppo. Dovendo conservare la forma cilindrica e il volume (33 cl), decidono di agire sulle dimensioni cercando, in particolare, di minimizzare la superficie totale della lattina. Il problema è: come scegliere altezza e raggio di base della lattina in modo che la superficie totale sia minima, tenendo il volume costante?

2005 ordin 2

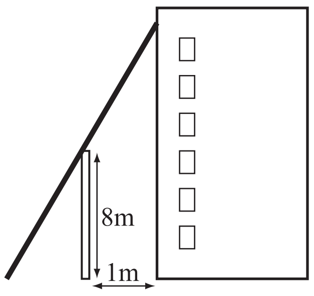
$V = \pi r^2 h \ \Rightarrow\ h = \frac{V}{\pi r^2};\ A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}\quad 0 < r < \infty$

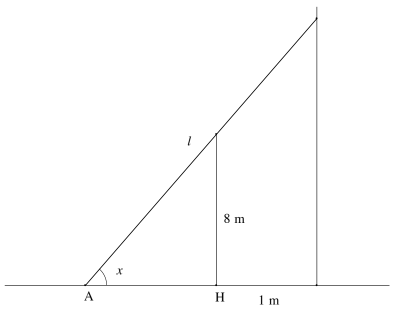
$A'(r) = 4\pi r - 2V/r^2;\ A'(r) = 0 \ \Rightarrow\ r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{330}{2\pi}} \simeq 3{,}745\,\mathrm{cm}$

$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{r^2 h}{2}\right)^2}} \ \Rightarrow\ \sqrt[3]{\left(\frac{r^2 h}{2}\right)^2} = r^2 \ \Rightarrow\ \frac{r^2 h}{2} = r^3 \ \Rightarrow\ r = \frac{h}{2}$ (la lattina ottima ha il

diametro uguale all'altezza, come i barattoli di vernice)

9 A Parallelamente alla facciata di un palazzo alto più di 8 m, a distanza di 1 m si erge un muro alto 8 m; qual è la lunghezza minima di una scala che, partendo dal suolo, si appoggi alla parete e passi per la sommità del muro?





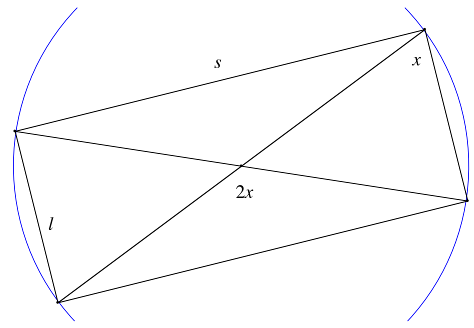
$$AH = 8\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x};\; l(x) = \frac{AH+1}{\cos x} = \frac{8\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{8}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$l'(x) = -\frac{8\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x};\; l'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}^3 x - 8\cos^3 x = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}^3 x = 8 \;\Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \;\Rightarrow\; x = \arctan 2;\; AH = \frac{8}{\operatorname{tg}\arctan 2} = 4;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\; l = \frac{5}{\cos(\arctan 2)} = 5\sqrt{1+2^2} = 5\sqrt{5}$$

9 B La resistenza di una trave a sezione rettangolare è direttamente proporzionale alla sua larghezza e al quadrato del suo spessore. Quanto valgono le dimensioni della trave (larghezza e spessore) più resistente che si può tagliare da un tronco cilindrico di raggio r ?



$$s = 2r\operatorname{sen} x;\; l = 2r\operatorname{sen}(90-x) = 2r\cos x;$$

$$f(x) = ls^2 = 8r^3\operatorname{sen}^2 x\cos x r^3 = 8\left(1-\cos^2 x\right)\cos x;$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -\operatorname{sen} x + 3\cos^2 x\operatorname{sen} x = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x\left(3\cos^2 x - 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \cos^2 x = \frac{1}{3} \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}};\; l = \frac{2r}{\sqrt{3}};\; s = 2r\sqrt{1-\frac{1}{3}} = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

10 A Qual è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 20 cm ?

2003
PNI
3

$$h = \sqrt{l^2 - r^2};\; V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}r^2\sqrt{l^2-r^2};\; V'(r) = 0 \;\Rightarrow$$

$$2r\sqrt{l^2-r^2} - r^2\frac{2r}{2\sqrt{l^2-r^2}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2r\left(l^2-r^2\right) - r^3}{\sqrt{l^2-r^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 3r^3 - 2rl^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$r\left(3r^2 - 2l^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{\frac{2}{3}}l;\; V_{\max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3 \simeq 322 \text{ cl}$$

Ripresentata nel: 2007 Ordinam. quesito 4 (con apotema=1 m)
Ripresentata nel: 2010 Ordinam. quesito 5 (con apotema=0,80 m)

10 B Tra tutti i coni aventi superficie laterale di misura $\pi\alpha^2$, qual è quello di volume massimo?

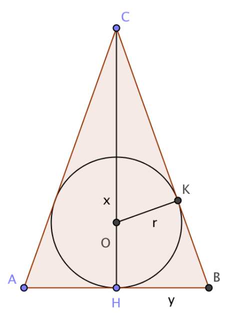
Sia a l'apotema; $S_L = \pi r a \;\Rightarrow\; a = \frac{\alpha^2}{r};\; h = \sqrt{a^2-r^2} = \sqrt{\frac{\alpha^4}{r^2} - r^2} = \frac{1}{r}\sqrt{\alpha^4 - r^4}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}r\sqrt{\alpha^4-r^4};\; V'(r) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\alpha^4-r^4} - \frac{4r^4}{2\sqrt{\alpha^4-r^4}} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^4 - r^4 - 2r^4 = 0$$

$$3r^4 = \alpha^4 \;\Rightarrow\; r = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{3}}$$

11 A Si verifichi che fra tutti i coni circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di volume minimo ha l'altezza uguale ad doppio del diametro della sfera.

2002
ester
2



La circonferenza inscritta ha centro nell'intersezione delle bisettrici (incentro); sia $x \equiv HC$

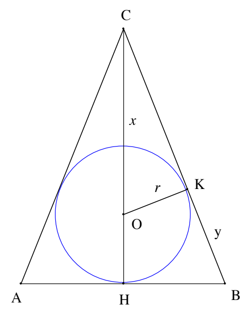
sia K il punto di tangenza; $\overline{CK} = \sqrt{(x-r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2rx}$; sia $y \equiv \overline{KB} = \overline{HB}$

$$y^2 + x^2 = \left(y + \sqrt{x^2-2rx}\right)^2 \text{ (teo. Pitag. su AHC)} \;\Rightarrow\; 2rx = 2y\sqrt{x^2-2rx} \;\Rightarrow\; y = \frac{rx}{\sqrt{x^2-2rx}}$$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}y^2 x = \frac{\pi}{3}\frac{r^2x^3}{x^2-2rx} \propto \frac{x^2}{x-2r};\; V'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x(x-2r) - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4r$$

11 B Si verifichi che fra tutti i coni circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di superficie laterale minima ha l'altezza pari a $\left(2+\sqrt{2}\right)r$.

2012
PNI
10



La circonferenza inscritta ha centro nell'intersezione delle bisettrici (incentro); sia $x \equiv OC$

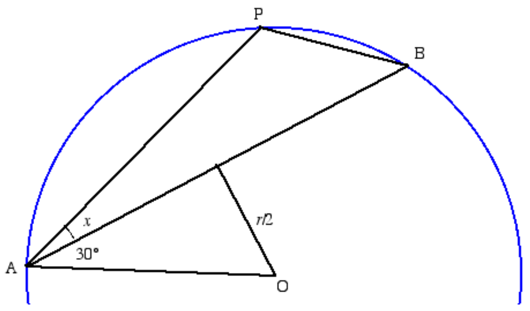
sia K il punto di tangenza; sia $y \equiv \overline{KB} = \overline{HB}$; $\overline{CK} = \sqrt{x^2 - r^2}$; i triangoli COK e CHB sono

simili quindi $\frac{r}{CK} = \frac{y}{x+r} \;\Rightarrow\; y = \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2-r^2}}$;

$$A(x) = \pi y \cdot \overline{CB} = \pi\frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2-r^2}}\left(\sqrt{x^2-r^2} + \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2-r^2}}\right) = \pi r \cdot \frac{x^2+rx}{x-r}$$

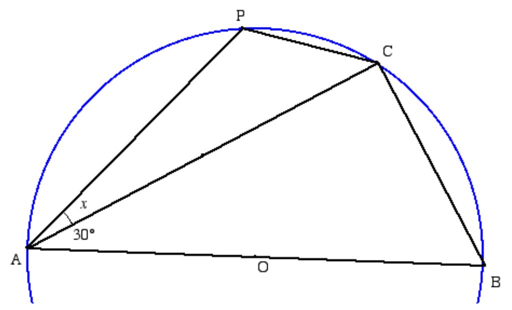
$$A'(x) = \pi r \cdot \frac{x^2 - 2rx - r^2}{(x-r)^2};\; A'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = r + r\sqrt{2}$$

12 A Sia AB una corda di una circonferenza di raggio r, a distanza $r/2$ dal centro O. Detto P un punto del minore dei due archi AB, si determini l'angolo CAB in modo che il perimetro di ABC sia massimo.



$$AB/2 = r\cos 30 \Rightarrow AB = \sqrt{3}r;\ AB = 2r\,\text{sen}\,A\hat{C}B \Rightarrow A\hat{C}B = \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} = 120°;$$
$$A\hat{B}C = 60 - x;\ AC = 2r\,\text{sen}(60-x) = r\left(\sqrt{3}\cos x - \text{sen}\,x\right);\ BC = 2r\,\text{sen}\,x;$$
$$P(x) = \sqrt{3}r + r\left(\sqrt{3}\cos x - \text{sen}\,x\right) + 2r\,\text{sen}\,x = r\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\,x\right);\ P'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$-\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \cos x = 0 \Rightarrow \text{tg}\,x = 1/\sqrt{3} \Rightarrow x = 30°$$

12 B Data la semicirconferenza di diametro AB = $2r$ e centro O, sia C un punto di tale circonferenza per il quale l'angolo BAC = $\pi/6$. Si determini, sull'arco AC, il punto P per il quale risulta massima l'area del triangolo APC.



$$AC = \sqrt{3}r;\ AP = 2r\cos(30+x) = r\left(\sqrt{3}\cos x - \text{sen}\,x\right);\ A(x) \propto \left(\sqrt{3}\cos x - \text{sen}\,x\right)\text{sen}\,x$$
$$A'(x) = \sqrt{3}\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right) - 2\,\text{sen}\,x\cos x;\ A'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,\text{tg}^2 x + 2\,\text{tg}\,x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$
$$\text{tg}\,x = \frac{-1\mp\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 30°$$

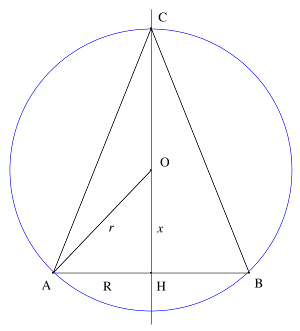
13 A Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante,
2002 stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il
straor cono abbia volume massimo.
3

$$p \equiv 2l + b \Rightarrow l = \frac{p-b}{2};\ h = \sqrt{l^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(p-b)^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 2pb}$$
$$V(b) = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2\frac{1}{2}\sqrt{p^2-2pb} \propto b^2\sqrt{p^2-2pb};\ V'(x) = \frac{pb(2p-5b)}{\sqrt{p(p-2b)}};\ V'(b) = 0 \Rightarrow$$
$$b = \frac{2}{5}p = \frac{2}{5}(2l+b) \Rightarrow \frac{l}{b} = \frac{3}{4}$$

13 B In un triangolo di base AB = a e altezza CH = h si inscriva il rettangolo, con un lato su AB e i vertici opposti sugli altri due lati, che in una rotazione completa attorno alla retta
1981 AB genera il solido di volume massimo.
ordin
3 Sai x l'altezza del rettangolo, per la similitudine dei rettangoli si ha:

$$\frac{b}{h-x} = \frac{a}{h} \Rightarrow b = \frac{a}{h}(h-x);\ V(x) = \pi x^2\frac{a}{h}(h-x) = \frac{\pi a}{h}x^2(h-x);\ V'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$2x(h-x) - x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}h$$

14 A Si calcoli l'altezza del cono di volume massimo inscritto in una sfera di raggio r e si verifichi che esso ha anche superficie laterale massima.

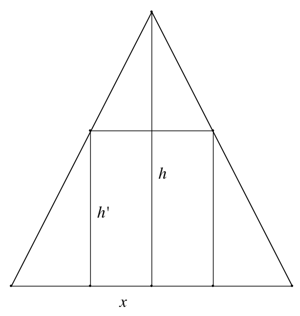


La circonferenza circoscritta ha centro nell'intersezione degli assi (circocentro); sia $x \equiv OH$

$$AH = \sqrt{r^2-x^2};\ V(x) = \frac{\pi}{3}\cdot\overline{AH}^2\cdot(r+x) = \frac{\pi}{3}(r+x)^2(r-x);\ V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{3} \Rightarrow$$
$$\overline{CH} = \frac{4}{3}r$$

proposto come quesito in 2008 Buenos ord. 3 (con damigiana)

14 B In un cono circolare retto avente per raggio di base e per altezza rispettivamente i segmenti r e h si inscriva il cilindro avente la base sul piano di base del cono e il volume
1976 massimo.
ordin
3

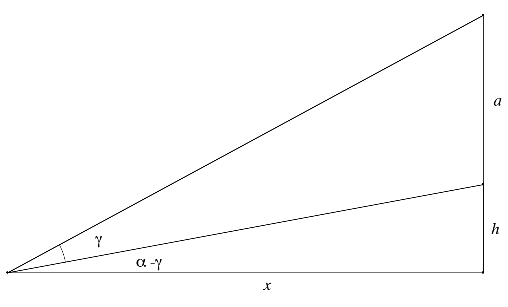


sia x il raggio di base del cilindro e h' la sua base; $\frac{r}{h} = \frac{r-x}{h'} \Rightarrow h' = \frac{h}{r}(r-x)$

$$V(x) = \pi x^2\frac{h}{r}(r-x);\ V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}r$$

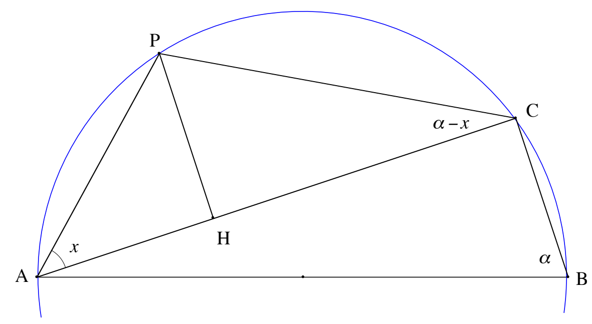
riproposta come quesito in 2008 Straord. quesito 3

15 A Su di un piedistallo di altezza h è posta una statua di altezza a. Si chiede a quale distanza dal piede del piedistallo ci si deve porre, sul piano orizzontale passante per la base del piedistallo, affinché la statua sia vista sotto l'angolo visuale massimo.



$$(a+h) = x\,\text{tg}\,\alpha \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{a+h}{x};\ \text{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta}{1\mp\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$
$$h = x\,\text{tg}(\alpha-\gamma) = x\frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\gamma}{1+\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\gamma} = x\frac{\frac{a+h}{x} - \text{tg}\,\gamma}{1+\frac{a+h}{x}\text{tg}\,\gamma} \Rightarrow \left(1+\frac{a+h}{x}\text{tg}\,\gamma\right)h = a + h - x\,\text{tg}\,\gamma \Rightarrow$$
$$\text{tg}\,\gamma = \frac{ax}{h(a+h)+x^2} \Rightarrow \gamma(x) = \arctan\frac{ax}{h(a+h)+x^2};$$
$$\gamma'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{ax}{h(a+h)+x^2}\right)^2}\cdot\frac{a\left(h(a+h)+x^2\right)-2ax^2}{\left(h(a+h)+x^2\right)^2};\ \gamma'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{h(a+h)}$$

15 B Data la semicirconferenza di diametro AB = $2r$, sia AC = $8r/5$ una corda. Si determini sull'arco AC il punto P per il quale l'area del quadrilatero ABCP sia massima. (porre l'angolo PAC = x)

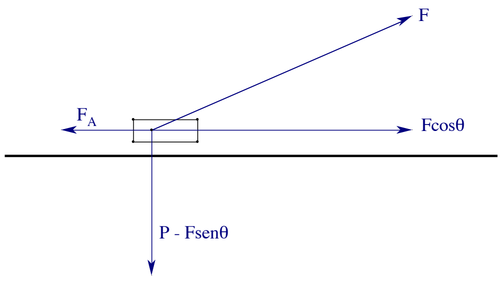


$$\frac{8}{5}r = 2r\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\frac{4}{5};\ A\hat{P}C = 180° - \alpha;\ AP = 2r\,\text{sen}(\alpha - x) =$$
$$= \left(\text{sen}\,\alpha\cos x - \cos\alpha\,\text{sen}\,x\right) = \frac{2}{5}r\left(4\cos x - 3\,\text{sen}\,x\right)$$

$PH = AP\,\text{sen}\,x = \frac{2}{5}5\left(4\cos x\,\text{sen}\,x - 3\,\text{sen}^2 x\right);$ l'area del quadril. sarà massima se PH è max

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -4\,\text{sen}^2 x + 4\cos^2 x - 6\,\text{sen}\,x\cos x = 0 \Rightarrow 2\,\text{tg}^2 x + 3\,\text{tg}\,x - 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\text{tg}\,x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases}1/2\\ -2 \ \text{no}\end{cases} \Rightarrow x = \arctan\frac{1}{2}$$

16 A Un blocco di peso P deve essere trascinato lungo un piano di un tavolo da una forza F che forma un angolo θ con la direzione del moto (con $0 \le \theta \le \pi/2$). Sia μ il coefficiente di attrito statico fra blocco e tavolo. Qual è l'angolo θ per il quale la forza F necessaria a vincere l'attrito è minima ?



La componente perpendicolare al piano di F vale: $F\,\mathrm{sen}\,\theta$; la forza perpendicolare netta che preme contro il tavolo è dunque $P_\perp = P - F\,\mathrm{sen}\,\theta$;

La forza di attrito vale $F_A = \mu P_\perp = \mu\left(P - F\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$; il blocco si muove quando la componente parallela al piano di F è uguale alla forza di attrito cioé quando:

$F\cos\theta = \mu\left(P - F\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \;\Rightarrow\; F(\theta) = \dfrac{\mu P}{\cos\theta + \mu\,\mathrm{sen}\,\theta}$; per minimizzare F massimizziamo

$g(\theta) = \cos\theta + \mu\,\mathrm{sen}\,\theta;$

$g'(\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta + \mu\cos\theta;$

$g'(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \arctan\mu$

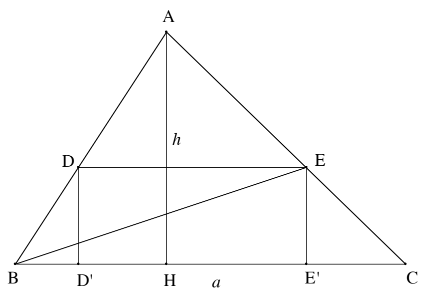
16 B Una lampada è appesa al soffitto in corrispondenza del centro di un tavolo rotondo di raggio r. A quale altezza dal tavolo deve essere collocata la lampada per ottenere la massima intensità di illuminazione al bordo del tavolo?

Sia I l'intesità luminosa della lampada; se x è la distanza della lampada dal centro del tavolo $d = \sqrt{r^2 + x^2}$ è la distanza della lampada dal bordo; bisogna massimizzare la componente perpendicolare al tavolo di I diviso d^2 cioè $\dfrac{I_{//}}{d^2} = \dfrac{I\cos\alpha}{r^2 + d^2}$; siccome $x = d\cos$

$$f(x) = \frac{I \cdot x}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}};\; f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}x\sqrt{r^2 + x^2}\cdot 2x}{\left(r^2 + x^2\right)^3} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + r^2 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

17 A Sul lato AC di un triangolo ABC, la cui base BC misura a e la cui altezza AH relativa ad essa misura h, si prenda un punto E. Per E si tracci la parallela a BC che incontra AB in
1978 D. Congiunto E con B, si determini la posizione di E per cui il solido ottenuto facendo
Buen ruotare il triangolo BED di una rotazione completa attorno alla retta BC abbia volume
1 massimo.



sia $x \equiv DE$ e $k \equiv EE'$;

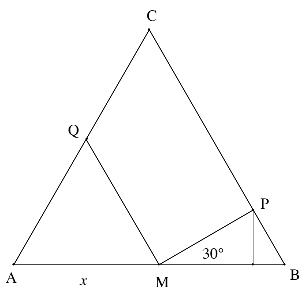
per la similitudine dei triangoli ADE e ABC di ha: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{h-k}{h} \;\Rightarrow\; k = \dfrac{h}{a}\left(a - x\right)$

il volume generato dalla rotazione dei triangoli BDD′ e CEE′ è equivalente a quella di un cono di raggio di base k e altezza $a - x$ per cui il volume generato dalla rotazione del trapezio BDEC vale: $\pi k^2 x + \dfrac{\pi}{3}k^2\left(a - x\right) = \dfrac{\pi}{3}k^2\left(2x + a\right)$ da cui

$$V_{BED} = V_{BDEC} - V_{BCE} = \frac{\pi}{3}k^2\left(2x + a\right) - \frac{\pi}{3}k^2 a = \frac{2\pi}{3}k^2 x = \frac{2\pi}{3}\frac{h^2}{a^2}\left(a - x\right)^2 x$$

$$V'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2\left(a - x\right)x + \left(a - x\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \left(a - x\right)\left(-2x + a - x\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = a/3$$

17 B Sul lato AB = a del triangolo equilatero ABC si prenda il punto M tale che, condotte per esso la perpendicolare e la parallela al lato BC ed indicate con P e Q le intersezioni di
1977 queste rette con i lati BC e CA del triangolo, risulti massimo il volume del solido
Buen generato dal quadrilatero MPCQ in una rotazione completa attorno ad AB.
2



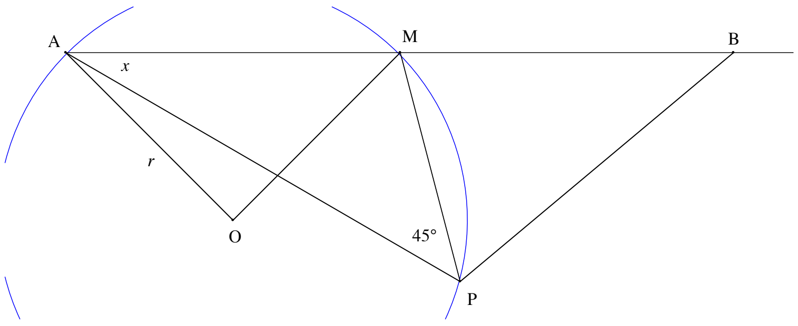
$V_{ABC} = \dfrac{1}{3}2\pi\left(a\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\dfrac{a}{2} = \dfrac{\pi}{4}a^3$ equivalente ai due coni di raggio di base l'altezza del triang.

$V_{AQM} = \dfrac{\pi}{4}x^3;\; V_{MPB} = \dfrac{\pi}{3}\left(\left(a - x\right)\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\left(a - x\right) = \dfrac{\pi}{16}\left(a - x\right)^3$ vedi consideraz. probl. accanto

$$V(x) = \frac{\pi}{4}\left(a^3 - x^3 - \frac{\left(a - x\right)^3}{4}\right);\; V'(x) = 0 \;\Rightarrow -3x^2 + \frac{3}{4}\left(a - x\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 + 2ax - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 3a^2}}{3} = \begin{cases} -a \text{ (no)} \\ a/3 \end{cases}$$

18 A É dato il segmento AB = $2a$; sia M il punto medio di AB. In uno dei due semipiani limitati dalla retta AB si fissi un punto P tale che APM = $\pi/4$. Posto l'angolo PAM = x determinare per quale valore di x è massimo PB^2.



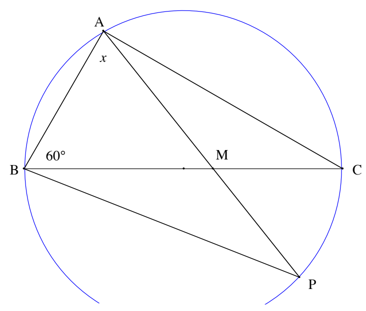
Per trovare il punto P costruiamo il quadrato che ha AM come diagonale; sia O uno degli altri vertici del quadrato, tracciamo la circonferenza di centro O e raggio OA; il punto P si trova sulla circonferenza; $x \equiv P\hat{A}M;\; 0 < x < 135°;\; \dfrac{a}{\mathrm{sen}\,45°} = \dfrac{PM}{\mathrm{sen}\,x} \;\Rightarrow\; PM = \sqrt{2}a\,\mathrm{sen}\,x$

$$PB^2 = PM^2 + MB^2 - 2PM\cdot MB\cos\left(45° + x\right) = 2a^2\,\mathrm{sen}^2 x + a^2 - 2a^2\,\mathrm{sen}\,x\left(\cos x - \mathrm{sen}\,x\right) =$$

$$= a^2\left(4\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\,2x + 1\right);\; f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 8\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 2\cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2\,\mathrm{tg}\,2x = 1 \;\Rightarrow$$

$$2x = \arctan\frac{1}{2} = \begin{cases} 26{,}56° \\ 180° + 26{,}56° \end{cases} \;\Rightarrow\; x = \begin{cases} 13{,}3° \text{ (min)} \\ 103{,}3° \text{ (max)} \end{cases}$$

18 B É dato il triangolo rettangolo ABC avente ipotenusa BC = $2l$ e l'angolo in B = $\pi/3$. Disegnata la semicirconferenza di diametro BC, non passante per A, condurre per A una semiretta che incontri BC in M e la semicirconferenza in P. Posto l'angolo BAP = x, determinare per quale valore di x l'area del triangolo MBP è massima.



$$BP = 2l\,\mathrm{sen}\,x;\quad \frac{BM}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{l}{\mathrm{sen}\left(120 - x\right)} \;\Rightarrow\; BM = \frac{l\,\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\left(120 - x\right)}$$

$$A(x) = \frac{1}{2}BP\cdot BM\cdot\mathrm{sen}\left(90 - x\right) = l^2\frac{\mathrm{sen}^2 x\cos x}{\mathrm{sen}\left(120 - x\right)};$$

$$A'(x) = \frac{\mathrm{sen}\,x\left(2\cos x - \mathrm{sen}^2 x\right)\mathrm{sen}\left(120 - x\right) + \mathrm{sen}^2 x\cos x\cos\left(120 - x\right)}{\mathrm{sen}^2\left(120 - x\right)};\; A'(x) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\left(2\cos x - \mathrm{sen}^2 x\right)\left(\sqrt{3}\cos x + \mathrm{sen}\,x\right) + \mathrm{sen}\,x\cos x\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x - \cos x\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$2\sqrt{3}\cos^3 x + 2\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x - \cancel{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}^2 x\cos x} - \mathrm{sen}^3 x + \cancel{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}^2 x\cos x} - \cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x = 0 \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\,x - 2\sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\mathrm{tg}\,x - \sqrt{3}\right)\left(\mathrm{tg}^2 x + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 2\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 60°$$

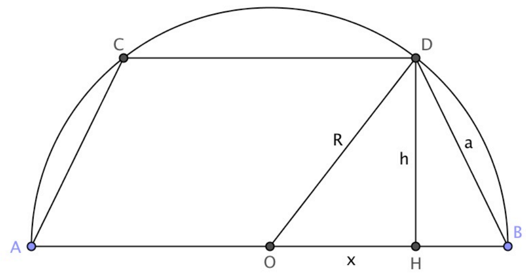
19 A É dato un cartone rettangolare di dimensioni a e b, con $a > b$. Ai quattro vertici si ritagliano quattro quadrati uguali in modo da costruire, ripiegando come in figura, una scatola a forma di parallelepipedo. Quanto deve valere il lato del quadrato ritagliato in modo da ottenere la massima capienza?

Sia x il lato del quadrato; $V(x)=(a-2x)(b-2x)\cdot x=4x^3-2(a+b)x^2+abx$

$V'(x)=12x^2-(4a+4b)x+ab$

$V'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_{1;2}=\dfrac{a+b\mp\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6};\;\; x_1=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$ (max)

19 B Si inscriva in una semisfera di raggio R il tronco di cono di massima superficie laterale, avente la base maggiore coincidente con quella della semisfera.
(nota: indicare con x il raggio della base minore; la superficie laterale di un tronco di cono è uguale alla lunghezza della circonferenza della sezione mediana per la lunghezza dell'apotema)



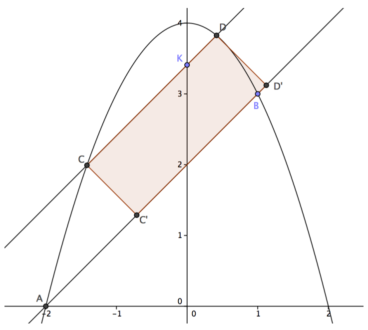
$h^2=R^2-x^2;\; S_l=2\pi\dfrac{R+r}{2}a=\pi(R+x)\sqrt{(R-x)^2+h^2}=\pi\sqrt{2R}(R+x)\sqrt{R-x}$

$S_l'(x)=\pi\sqrt{2R}\left(\sqrt{R-x}-\dfrac{(R+x)}{2\sqrt{R-x}}\right)=\pi\sqrt{2R}\,\dfrac{2(R-x)-(R+x)}{2\sqrt{R-x}}=\pi\sqrt{2R}\,\dfrac{R-3x}{2\sqrt{R-x}}$

$S_l'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{R}{3}$

$h=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{9}}=\dfrac{2\sqrt2}{3}R$

20 A Dopo aver scritto l'equazione della parabola con asse parallelo a quello delle y, passante per A(-2; 0), per B (1; 3) e ivi tangente alla retta di equazione $y=-2x+5$, si tracci la retta r parallela ad AB e tale che i suoi punti di intersezione con la curva appartengono all'arco AB. Indicati con C e D tali punti e con C′ e D′ le loro proiezioni ortogonali su AB, si determini l'equazione della retta r in modo che sia massima l'area del rettangolo CC′D′D.



$\begin{cases} y'(1)=-2 \\ y(-2)=0 \\ y(1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ 4a-2b+c=0 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow y=-x^2+4;$

la retta per A e B è: $y=x+2$; la parallela tangente alla parab. si trova imponendo $y'(x)=1$

$T\left(-1/2;15/4\right)$ punto di tangenza; $y=x+17/4$ (retta tangente); quindi: $2<k<17/4$;

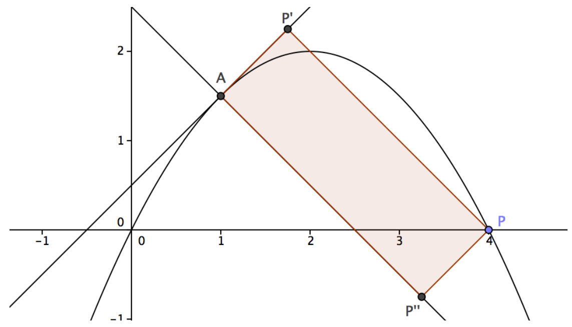
$\begin{cases} y=-x^2+4 \\ y=x+k \end{cases} \Rightarrow x^2+x+k-4=0 \Rightarrow x_{1;2}=\dfrac{-1\mp\sqrt{-4k+17}}{2}$; per trovare la distanza CD

consideriamo che CD forma un angolo di 45° con l'asse x, quindi $CD=\left(D_x-C_x\right)\cdot\sqrt2=$

$=\sqrt{-4k+17}\cdot\sqrt2;\; CC'=\left(k-2\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt2};\;$ A$(k)=CD\cdot CC'=\sqrt{-4k+17}\cdot\left(k-2\right);\;$ A′$(k)=0\Rightarrow$

$-\dfrac{2\left(k-2\right)}{\sqrt{-4k+17}}+\sqrt{-4k+17}=0 \;\Rightarrow\; -2k+4k-4k+17=0 \;\Rightarrow\; k=7/2$

20 B Data la parabola di equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$, sia A il suo punto di ascissa 1. Dopo aver condotto la tangente e la normale in A alla curva, sia B l'ulteriore intersezione della normale con la parabola. Si determini sull'arco AB un punto P in modo che, indicate con P′ e P′′ le sue proiezioni ortogonali sulla tangente e sulla normale, sia massima l'area del rettangolo PP′AP′′.



A$(1;3/2)$; $y=x+1/2$ (tangente); $y=-x+5/2$ (normale); B$(5;-5/2)$;

$d_1=\dfrac{\left|y_0-\left(mx_0+q\right)\right|}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{1}{\sqrt2}\left|-\dfrac12x^2+2x-x-\dfrac12\right|=\dfrac{1}{\sqrt2}\left|-\dfrac12x^2+x-\dfrac12\right|$ (sempre ≥ 0)

$d_2=\dfrac{1}{\sqrt2}\left|-\dfrac12x^2+2x+x-\dfrac52\right|$ (>0 per $1<x<5$)

A$(x)=d_1\cdot d_2=\dfrac12\left(-\dfrac12x^2+x-\dfrac12\right)\left(-\dfrac12x^2+2x+x-\dfrac52\right)=$

A′$(x)=0 \;\Rightarrow\; x^3-6x^2+9x-4=0 \;\Rightarrow\; \left(x-1\right)^2\left(x-4\right)=0 \;\Rightarrow\; x=4$