non euclidea, esprime molto bene questo concetto:

> ...mentre il numero è puramente un prodotto del nostro spirito, lo spazio possiede una realtà anche al di fuori del nostro spirito, alla quale noi non possiamo prescrivere le sue leggi completamente a priori[12].

Con l'avvento delle geometrie non euclidee la matematica, in un certo senso, si emancipa completamente dalla realtà e diviene, un po' come la teologia, lo studio delle conseguenze di assiomi scelti arbitrariamente.

Riferimenti bibliografici

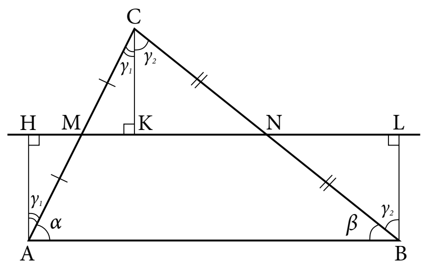
E. Agazzi – D. Palladino, *Le geometrie non euclidee*, Mondadori, 1978 (La scuola, 1998)
R. Bonola, *La geometria non euclidea*, Zanichelli, 1906
L. Bunt – P. Jones – J. Bedient, *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Zanichelli, 1983
Ya. S. Dubnov, *Errori nelle dimostrazioni in geometria*, Progresso Tecnico Editoriale, 1965
Euclide, *Elementi*, UTET, 1970
G. Loria, *Storia delle matematiche*, Hoepli, 1929
P. Odifreddi, *Divertimento geometrico*, Bollati Boringhieri, 2003
Proclo, *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, Giardini, 1978
G. Saccheri, *Euclide liberato da ogni macchia*, Bompiani, 2001
R. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, 1991

questa dispensa è disponibile su: www.savarese.altervista.org

12. Da una lettera di Gauss a Bessel del 9 Aprile 1830.

Marco Savarese

La storia del V postulato



A Claudia
con $\heartsuit \rightarrow \infty$

Indice

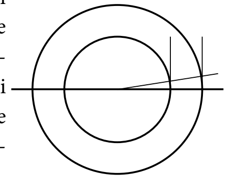
GENNAIO 2009 - REV. 8/10 - 2.2

base nell'ipotesi dell'angolo acuto (punto 4). Saccheri argomenta però che quando HB diventa estremamente piccolo i due segmenti, essendo entrambi perpendicolari a BD, tendono a diventare uguali. Siccome il segmento infinitesimo DF è uguale, a sua volta, ad un tratto infinitesimo dell'arco CDK Saccheri estrapola che l'intero arco CDK deve essere uguale alla base AB. A questo punto ha ottenuto una vera e propria contraddizione e può enunciare la:

PROPOSIZIONE XXXVIII. *L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché si distrugge da sola.*

In un certo senso è come se si affermasse che, siccome $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ allora, sommando tutti i tratti infinitesimi, è anche vero che $\operatorname{sen} x = x$.

L'errore di Saccheri fa un po' sorridere ma teniamo presente che l'analisi matematica, come la conosciamo oggi, non esisteva. La situazione si vede meglio nel seguente disegno. Le due circonferenze concentriche hanno entrambe le tangenti perpendicolari ai raggi. Col ragionamento di Saccheri due archi infinitesimi delle circonferenze si possono, al limite, considerare uguali e quindi sommando tutti i contributi infinitesimi otteniamo l'assurdo che la lunghezza delle due circonferenze è la stessa.



Conclusione

Abbiamo visto che nell'ipotesi dell'angolo acuto non si ottiene alcuna contraddizione ma soltanto una quantità di teoremi uno meno intuitivo dell'altro. Imre Toth esprime questo concetto molto poeticamente:

> Con la creazione di questo *corpus* la geometria perde l'innocenza. Da Saccheri in poi, non si può più ignorare che a partire da un assioma opposto a quello euclideo deriva una geometria in se perfettamente coerente. Non solo: le deduzioni non–euclidee di Saccheri, nella loro esotica bellezza, iniziano ad esercitare una forte *seductio ad absurdum*[11].

La domanda che forse vi state facendo è: ma allora questi strani teoremi sono veri o falsi? Se tornate a pagina uno di questo opuscoletto troverete scritto che:

> Il concetto di "verità" per le proposizioni geometriche (e in generale nella matematica) è ricondotto al problema della verità delle proposizioni da cui si parte, cioè in definitiva al problema della "verità" degli assiomi.

Se siete disposti ad accettare che *due rette non si incontrino anche quando tagliate da una trasversale formino angoli coniugati minori di 180°*, allora le proposizioni ottenute da Saccheri sono "verissime"; esse costituiscono in pratica il primo esempio di geometria non euclidea, in particolare quella che sarebbe stata chiamata in seguito geometria iperbolica.

Ma forse la vostra domanda è ancora più ingenua e vi chiedete ancora se il V postulato sia vero. Vi rispondo, citando sempre la prima pagina: *il problema della verità degli assiomi è in realtà un problema del tutto privo di significato.* Prima del XIX secolo si pensava che gli assiomi fossero in un certo modo determinati dalla realtà e a nessuno era venuto il dubbio che la loro scelta potesse essere libera e non determinata dall'evidenza delle osservazioni. Soprattutto per quanto riguarda la geometria, che nasce come lo studio delle figure nello spazio, sembrava che gli assiomi non potessero essere scelti in modo del tutto arbitrario. Gauss, che aveva anche lui ottenuto notevoli risultati di geometria

11. Dal saggio introduttivo di: G. Saccheri, *Euclide liberato da ogni macchia*, Bompiani, 2001

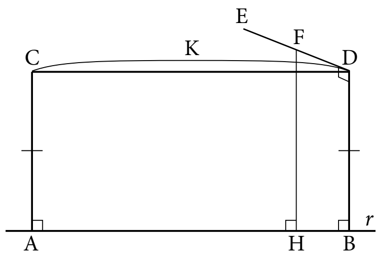
A questo punto Saccheri, stabilito che possono esistere rette nella condizione (C), cerca di arrivare ad una conclusione ed enuncia la:

Proposizione XXXIII. *L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta*[8].

Saccheri nella dimostrazione fa uso di 5 lemmi, che occupano ben 16 pagine, ma in sostanza egli afferma che, mentre due rette incidenti non possono mai avere una perpendicolare comune, le rette nella condizione (C) avrebbero una perpendicolare comune in un punto comune all'infinito e ciò, per Saccheri, sarebbe contrario alla natura della retta. Ed è qui che egli sbaglia. La dimostrazione del gesuita purtroppo si basa sull'estensione all'infinito di proprietà valide al finito: non è la stessa cosa per due rette avere in comune un punto e avere in comune un punto all'infinito[9]. Può anche darsi che l'esistenza di rette che si comportano in modo così strano "ripugni alla natura della linea retta", ma purtroppo questa non è affatto una contraddizione. Si noti anche come Saccheri non possa qui dire, come nel caso dell'ipotesi dell'angolo ottuso, che essa "si distrugge da se stessa". Evidentemente egli non è convinto di questa dimostrazione e ne tenta un'altra che vedremo fra poco; il fatto stesso è sospetto. Di solito in matematica una dimostrazione, se priva di errori, è più che sufficiente e non è necessario perorare i teoremi con ulteriori argomentazioni a favore come si usa fare in altre discipline. Averne prodotta una seconda, non come sfoggio di virtuosismo ma per convincere il lettore e soprattutto se stesso, mostra quanto lo stesso Saccheri non fosse sicuro di aver ottenuto una vera assurdità logica.

Per poter confutare senza alcuna ombra di dubbio anche l'ipotesi dell'angolo acuto e poter affermare finalmente che anch'essa si distrugge da se stessa, Saccheri si avventura in questioni di analisi infinitesimale che lo portano a prendere una cantonata ancora più grossa. Lo stato embrionale di questa disciplina purtroppo non consentiva di produrre risultati attendibili e l'errore, visto a posteriori, ci appare alquanto ingenuo.

Saccheri mostra che nell'ipotesi dell'angolo acuto il luogo dei punti equidistanti da una retta non è una retta bensì una curva che egli chiama *linea equidistante*. Su una retta *r* si innalzino due perpendicoli uguali AC e BD. Sia l'arco CDK la linea equidistante da *r*; possiamo dire che questa linea è sicuramente[10] maggiore del segmento CD il quale a sua volta è maggiore della base AB del quadrilatero di Saccheri ABDC (vedi punto 2). D'altra parte Saccheri dimostra che la retta tangente all'arco CDK in D è la retta DE perpendicolare al lato DB nel vertice D del quadrilatero. Allora,



preso sulla base un segmento infinitesimo HB egli *deduce* che esso è uguale al segmento infinitesimo DF appartenente a DE. Si noti che il quadrilatero HBDF è trirettangolo e la sommità è maggiore della

8. *Hypothesis anguli acuti est absolute falsa; quia repugnans lineae rectae.*
9. Due rette che hanno un punto in comune si tagliano, mentre due rette che hanno in comune un punto all'infinito (concetto impiegato in geometria proiettiva per indicare rette parallele) si toccano, ma non si attraversano.
10. Che la retta sia la minima fra tutte le linee aventi gli stessi estremi costituisce il primo postulato dell'opera di Archimede *Sulla sfera e il cilindro*. Questo postulato rappresenta una importante estensione della Prop. XX degli Elementi: *in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due*, che si può applicare immediatamente ad un poligono di qualunque numero di lati in modo tale che, data una qualunque spezzata aperta il segmento che unisce gli estremi risulta minore della somma dei lati della spezzata. Ragionando al limite il risultato può estendersi ad una qualunque curva.

1. Gli Elementi di Euclide

Differenza fra concetto di verità e dimostrazione

Prendiamo queste due affermazioni: il diametro interno della mia fede vale 1,9 cm; la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°. Per sapere se è vera la prima affermazione prendo un calibro, misuro il diametro e confronto il risultato con quanto atteso; per la seconda invece non posso evidentemente usare un goniometro: se lo facessi otterrei non una dimostrazione ma una banale verifica in un caso particolare.

L'affermazione "la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°", come ogni studente dovrebbe sapere, è ricavata da altre proposizioni mediante ragionamenti, senza far uso di alcuno strumento. Il concetto di "verità" per le proposizioni geometriche (e in generale nella matematica) è ricondotto al problema della verità delle proposizioni da cui si parte, cioè in definitiva al problema della "verità" degli assiomi. Mentre la verità è qualcosa di cui una affermazione gode o non gode indipendentemente dalla verità di altre affermazioni, una proposizione è dimostrabile soltanto a partire da altre proposizioni, cioè il concetto di dimostrazione è un concetto intrinsecamente relativo.

Come vedremo fra breve per quanto riguarda il problema della verità degli assiomi è ormai noto da tempo che, non solo ad esso non si può dare una risposta, ma il problema è in realtà del tutto privo di significato. La storia del V postulato costituisce un ottimo argomento per capire il significato della precedente affermazione e il senso della rivoluzione dei fondamenti della matematica verificatasi all'inizio dell'800.

Gli elementi di Euclide e il V postulato

Gli "elementi" di Euclide sono il più importante testo di geometria e aritmetica pervenutoci dall'antichità. Per numero di traduzioni ed edizioni gli Elementi possono competere con la Divina Commedia e probabilmente sono superati solo dalla Bibbia. Praticamente senza alcuna modifica è stato utilizzato come libro di testo per più di 2000 anni se si considera che fino alla fine dell'ottocento la geometria veniva studiata ancora sugli Elementi. I successivi manuali sui quali tutti abbiamo studiato non sono altro che libere rielaborazioni con qualche aggiustamento, come vedremo in seguito, nella parte assiomatica. Gli Elementi costituiscono un unico sistema deduttivo di 465 teoremi e contengono non solo una enorme quantità di geometria elementare, ma anche numerosi elementi di algebra (anche se l'algebra come la intendiamo oggi è una invenzione degli arabi) e di teoria dei numeri. Fin dal loro primo apparire sono diventati per gli scienziati una pietra di paragone: essi rappresentano l'archetipo del trattato scientifico.

Di Euclide non sappiamo nulla se non un paio di aneddoti. Il primo me lo ripropone ogni tanto qualche studente quando interviene con il classico: “professore, ma a che serve imparare queste cose?”. Si narra che Euclide abbia cacciato l’alunno dopo avergli elargito una moneta. Nel secondo, si racconta che Tolomeo I, il generale di Alessandro Magno che ne ereditò il potere ad Alessandria, gli abbia chiesto se esistesse qualche scorciatoia per imparare più rapidamente gli Elementi. La risposta fu lapidaria: “non esiste via regia per la geometria”.

Le definizioni

Gli Elementi non hanno prefazione o introduzione, non si aprono enunciando i loro obiettivi né si curano di fornire motivazioni o commenti; iniziano senza preamboli con un elenco di 23 definizioni di cui la prima è la celebre: *Σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν* che suona letteralmente: “punto è dove parte nessuna” cioè “nel punto non vi sono parti” o meglio “punto è ciò che non ha parti”. Il punto viene considerato come l’atomo, l’indivisibile. Un punto per Euclide è una idealizzazione di un puntino, proprio come l’oscillatore armonico del fisico è l’idealizzazione di un pendolo reale. Il punto è il limite a cui si avvicinano puntini che diventano sempre più piccoli. La definizione è molto bella ma ad un esame più attento fa acqua da tutte le parti. Innanzitutto non è una definizione nominale come noi oggi intendiamo tutte le definizioni. Una definizione nominale è semplicemente una definizione in cui ogni termine utilizzato è già stato precedentemente definito. Ma essere parte di qualcosa è un concetto del tutto evidente nel linguaggio naturale, purtroppo non in matematica dove il ricorso all’intuizione genera catastrofi.
Non che in Euclide non siano presenti definizioni nominali, per esempio la decima:

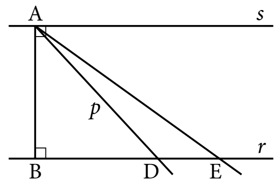
> X. Quando una semiretta innalzata su un’altra retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.

Questa definizione è molto interessante e ci ritorneremo a proposito del quarto postulato, per il momento notiamo che Euclide paga uno ma prende due, nel senso che con questa affermazione ha definito sia l’angolo retto che la perpendicolare. Anche l’ultima delle 23 è una definizione nominale:

> XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall’una e dall’altra parte, non si incontrino da nessuna delle due parti.

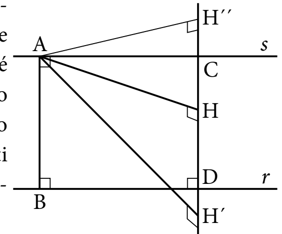
In definitiva possiamo dire che le definizioni che non ci piacciono sono le prime, quelle che potremmo chiamare definizioni “reali”. In verità sarebbe meglio tradurre il vocabolo greco utilizzato da Euclide (*ὅροι)* con “termini” e non con “definizioni”. La “definizione reale” per Euclide è concepita come un mezzo per indicare, o meglio, descrivere un oggetto esistente o a cui si attribuisce una qualche esistenza (in un mondo platonico di idee). Euclide tenta disperatamente di descrivere il punto come se questo oggetto geometrico esistesse davvero in natura. Noi oggi abbiamo rinunciato a definirlo e storciamo il naso di fronte all’ingenuo tentativo di Euclide ribattendo immediatamente che non è ben chiaro che cosa si intenda per parte e che tale termine per essere utilizzato dovrebbe essere precedentemente definito. Comunque possiamo essere indulgenti su questo punto (che fine doppiosenso), per capire che la geometria non parla della realtà ci vorranno ancora altri 2000 anni.
Per la retta la definizione risulta ancora più oscura:

> IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti (*Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*).

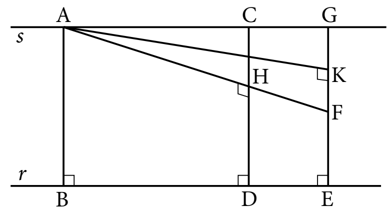


Dal punto A tracciamo rette oblique alla retta AB ed esaminiamone in dettaglio il comportamento: alcune di esse, come AD e AE incontrano *r*. Ve ne possono essere altre, però, che non incontrano la retta *r* e lo abbiamo anche dimostrato. Fra queste ultime, inoltre, ce n’è ancora un sottoinsieme che ha con la retta *r* una perpendicolare comune.

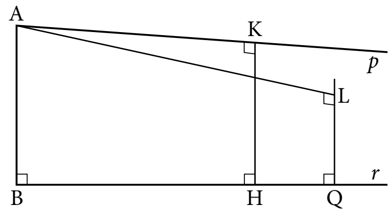
Vediamo come sia possibile costruire delle rette di questo tipo. Da un punto C della retta *s* si abbassi la perpendicolare CD sulla retta *r* ; poi dal punto A abbassiamo la perpendicolare AH sulla retta CD. Dimostriamo che il punto H è interno al segmento CD. AH e *r* hanno CD come perpendicolare comune, quindi non possono incontrarsi e H non può trovarsi nella posizione H´ e neppure coincidere con D. Ma neanche H´´ è lecita come posizione poiché in questo caso l’angolo ACD (che è acuto in quanto quarto angolo del quadrilatero trirettangolo ABCD) sarebbe esterno al triangolo rettangolo AH´´C. Infine H non può coincidere con C altrimenti l’angolo acuto ACD coinciderebbe con l’angolo retto AH´´C. In definitiva la retta AH è interna all’angolo BAC ed è del tipo (B).



Inoltre si osserva che, se si ripete la costruzione partendo da un punto G più a destra di C, e si abbassa la perpendicolare GE alla retta r, la perpendicolare da A su GE sta al di sotto di AH. La dimostrazione è semplice e si basa sempre sullo stesso fatto: supponiamo per assurdo che la perpendicolare AK su GE stia sopra; l’angolo acuto in F del quadrilatero trirettangolo HDEF sarebbe esterno al triangolo rettangolo AKF. Inoltre il punto K non può coincidere con F, altrimenti l’angolo acuto AFE coinciderebbe con l’angolo retto AKE. In definitiva la retta AK sta sotto la retta AH.

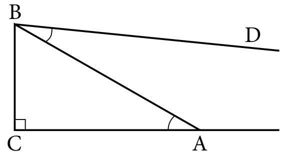


Siamo quindi arrivati alla conclusione che l’insieme delle oblique uscenti da A e interne all’angolo BAC è diviso in due gruppi separati: quello delle rette che intersecano *r* e quello delle rette parallele ad *r* che hanno con *r* una perpendicolare comune. Allora, in base al principio di continuità, vi sarà almeno una retta *p* che separa i due gruppi. Se dimostriamo che questa retta non interseca *r* e non possiede con *r* una perpendicolare comune potremo concludere che queste due rette sono nella condizione del terzo gruppo (punto C). Dimostriamo per assurdo che *p* non interseca *r*. Sia D il punto di intersezione (si veda la prima figura in alto in questa pagina), se prendiamo un punto E a destra di D la retta secante AE sarebbe al di sopra di *p* ma questo è assurdo perché *p* è l’elemento di separazione fra i due gruppi di rette e non può essere seguita da una retta del primo gruppo. Supponiamo allora, sempre per assurdo, che *p* abbia con *r* una perpendicolare comune HK. Prendiamo su *r* un punto Q a destra di H e abbassiamo da A la perpendicolare AL sulla perpendicolare in Q a *r*. AL adesso è al di sotto di *p* e questo è assurdo perché *p*, in quanto elemento di separazione, non può stare al di sopra di una retta del secondo gruppo.

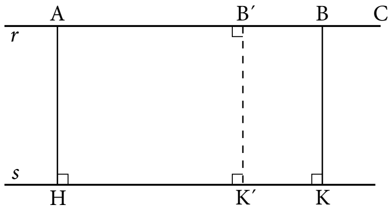


mente.

Come prima cosa Saccheri fa notare che, nell'ipotesi dell'angolo acuto esistono una perpendicolare e una obliqua ad una stessa retta che non si incontrano. Infatti, sia ABC un triangolo rettangolo in C, dal vertice B si tracci la retta BD in modo che gli angoli ABD e BAC siano uguali. La retta CA è la perpendicolare alla retta CB, mostriamo che DB è l'obliqua rispetto a CB. Infatti, per l'ipotesi dell'angolo acuto, la somma degli angoli di un triangolo è minore di 180° per cui la somma degli angoli CBA e CAB è minore di 90°, siccome gli angoli ABD e BAC li abbiamo costruiti uguali l'angolo CBD è acuto. Ma le due rette CA e BD sono parallele perché formano angoli alterni interni uguali (Prop. XXVII di Euclide) pertanto CA e BD, che non si incontrano, sono l'una obliqua e l'altra perpendicolare alla retta BC.



Saccheri passa poi a classificare tutte le possibili posizioni che due rette possono assumere nel piano. In geometria euclidea, come tutti sanno, due rette o sono incidenti o sono parallele, *tertium non datur*. Nel caso dell'ipotesi dell'angolo acuto invece, abbiamo appena visto che le cose cambiano e Saccheri si trova di fronte a tre possibilità. La prima e che le due rette siano incidenti e, come succede in geometria euclidea, esse non possono avere nessuna perpendicolare comune altrimenti si formerebbe un triangolo con due angoli retti, cosa che la prop. XVII vieta espressamente. Per capire come si formano gli altri due casi disegniamo due rette *r* e *s* parallele. Siano A e B due punti di *r* da cui abbassiamo le perpendicolari su *s*.
Ora, se vale l'ipotesi dell'angolo acuto la somma degli angoli interni del quadrilatero HKBA è minore di 360° e quindi gli angoli in A e in B del quadrilatero sono minori di 180°; supponiamo che quello in A sia minore o uguale a quello in B, si hanno tre possibilità:



i. L'angolo in A è acuto e l'angolo in B è retto; in questo caso BK è una perpendicolare comune alle due rette.
ii. Gli angoli in A e in B sono entrambi acuti; in questo caso l'angolo KBC è ottuso e, muovendo il punto B sulla retta *r* verso il punto A, per ragioni di continuità dovrà esistere sulla retta *r* un punto B´ tale che K´B´C sia retto; allora K´B´ sarà la perpendicolare comune alle due rette.
iii. L'angolo in A è acuto e quello in B ottuso; in questo caso Saccheri dimostra che, se *r* e *s* hanno una perpendicolare comune essa non cade fra H e K, se non l'hanno vanno sempre di più accostandosi e la loro distanza finisce per diventare minore di un segmento piccolo a piacere. In altre parole se esistono rette parallele prive di perpendicolare comune esse si comportano in modo asintotico.

In definitiva, sempre nell'ipotesi dell'angolo acuto, due rette nel piano possono essere:
A. incidenti;
B. parallele con una perpendicolare comune;
C. parallele, senza perpendicolare comune e che si avvicinano indefinitamente l'una all'altra.

A questo punto Saccheri per provare l'effettiva esistenza di rette che si comportano come descritto nel punto (C) ragiona nel seguente modo: sia data la retta *r* e un punto esterno A; da A si abbassi la perpendicolare AB alla retta *r* e si consideri la retta *s* a sua volta perpendicolare ad AB nel punto A.

Molti si aspetterebbero che Euclide dica che "una linea retta è il cammino più breve fra due punti". In effetti questo famoso principio appare soltanto nelle opere di Archimede, che risalgono a circa cinquant'anni dopo gli Elementi, e anche lì come assioma e non come definizione. Quello che è strano in questa definizione è che non è chiaro cosa significhi esattamente che una retta "giace ugualmente rispetto ai suoi punti". Tempo prima Platone aveva detto nel Parmenide che "rettilineo è ciò il cui centro è interposto fra le due estremità", definizione che suggerisce l'idea di linea retta come "linea di mira" ossia di quella linea che, osservata da una particolare angolatura, si riduce ad un punto e tutto ciò che si vede è solamente l'estremo più vicino in quanto tutti i punti risultano allineati. Forse in questo senso Euclide voleva intendere che nessun punto è privilegiato e tutti giacciono "egualmente" ed è probabile che il suo senso di rigore formale gli abbia impedito di esprimersi in maniera così immediata e pratica. Come vedremo Euclide non nomina mai né la riga né il compasso figuriamoci se poteva introdurre un concetto fondamentale come la retta facendo uso di un fenomeno fisico come la vista e in particolare dell'azione di prendere la mira.

I primi quattro postulati

La parola postulato viene dal verbo latino *postulo* che si può tradurre con richiedere. I postulati non sono altro che semplici affermazioni che Euclide chiede al lettore di accettare per vere senza dimostrazione. Qualora il lettore voglia accogliere tali premesse, tutto il resto verrà rigorosamente dimostrato e i risultati a cui si perverrà saranno frutto soltanto di argomentazioni logiche. In questo senso gli Elementi possono considerarsi come il primo emblematico testo universalmente condiviso in cui è abolito qualsiasi ricorso al principio di autorità. I postulati oltre ad essere semplici devono essere anche evidenti; ecco i primi quattro:

I. Si richiede: che si possa tracciare una retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto (*Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν*).

II. E che un segmento[1] si possa prolungare indefinitamente in linea retta (*Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽εὐθείας ἐκβαλεῖν*) .

III. E che si possa tracciare una circonferenza con qualsiasi centro e qualsiasi raggio (*Καὶ παντὶ κέντπω καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι*).

IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro (*Καί πάσαν τάς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι*).

Si vede subito che i primi tre postulati riguardano la possibilità di eseguire costruzioni; in particolare i primi due si riferiscono all'uso della riga mentre il terzo a quello del compasso. Come abbiamo detto Euclide non nomina mai gli strumenti in questione e la sua trattazione resta sempre ad un livello molto astratto. Si noti inoltre che la riga di Euclide non ha tacche e serve solo per andare diritti mentre l'uso del compasso si rivela ancora più ostico. Noi infatti usiamo questo strumento con una certa disinvoltura sia per tracciare circonferenze che per trasportare segmenti. Se abbiamo un segmento AB e un punto qualsiasi C non ci facciamo scrupoli nel tracciare la circonferenza di centro B e raggio AB aprendo il compasso su AB e poi trasportandolo così aperto fino a collocarlo con una punta in C. Al contrario il compasso di Euclide non può essere utilizzato in questo modo, si può pensare che

1. In originale *retta terminata*, noi useremo sempre segmento. Per Euclide la retta è solo *potenzialmente* infinita.

esso si richiuda non appena le sue punte vengano entrambe sollevate dal foglio. Per trasportare un segmento la procedura ovviamente esiste ma è un po' più lunga e costituisce il contenuto della proposizione II. Si noti inoltre che, benché Euclide intendesse che la retta del postulato I fosse unica, cioè che vi fosse una sola retta passante per due punti, ciò non viene mai detto esplicitamente.

A molti il postulato 4 potrebbe sembrare superfluo. O meglio potrebbe sembrare un caso particolare del principio che una cosa è uguale a se stessa cioè A = A, il principio di identità. Ma perché allora ribadirlo per gli angoli retti? In verità il problema ha origine dalla definizione X dove si definisce l'angolo retto e la retta perpendicolare. Supponiamo di aver costruito due angoli retti mediante questa definizione in due parti del piano anche molto distanti fra loro, chi ci garantisce che i due angoli così costruiti siano uguali fra loro? Il fatto che li chiamiamo ambedue retti ce lo suggerisce, ma con questo criterio anche tutti gli angoli che chiamiamo "acuti" dovrebbero essere uguali. In effetti il quarto postulato non è ovvio, esso ci assicura che il piano è uniforme nel senso che le sue proprietà restano inalterate quando si passa da un punto all'altro. Veniamo ora al famigerato quinto postulato:

Il quinto postulato

> V. E che, se una retta, intersecandone altre due, forma angoli coniugati interni la cui somma è minore di due retti, le due rette, prolungate illimitatamente, si incontreranno da quella parte in cui la somma è minore di due retti (*Καὶ ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντός καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἅ μέρη αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες*).

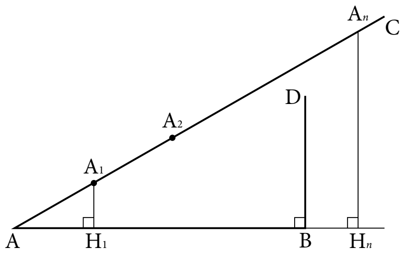
La prima cosa che salta subito all'occhio è che il quinto postulato è più lungo degli altri. Questa comunque potrebbe essere solo una casualità, la cosa più preoccupante è che parla di qualcosa che può avvenire anche molto lontano dallo spazio compreso nel foglio di lavoro. Nessuno mette in dubbio che le rette prima o poi si incontreranno, il problema è semplicemente l'evidenza di questa proposizione. I postulati precedenti godono tutti della caratteristica di essere estremamente semplici ed evidenti, il quinto è più lungo e soprattutto si riferisce ad una proprietà che non avviene al finito. Di fatto, l'evidenza di questo postulato fu messa in dubbio già dall'antichità, per esempio Proclo (410–435 d.C.) nel suo celebre commento al I libro scrive:

> Questa proposizione deve essere assolutamente depennata dalla serie degli altri postulati poiché si tratta di un teorema pieno di difficoltà, alla cui soluzione Tolomeo ha dedicato un libro. Per la sua dimostrazione sono necessarie molte definizioni e diversi altri teoremi, mentre lo stesso Euclide dimostra come teorema il suo inverso (prop. 28). Alcuni tuttavia si lasciano forse ingannare e sarebbero disposti a elencare esso pure fra i postulati, poiché esso, man mano che i due angoli retti diminuiscono, induce senz'altro la convinzione che le due rette tendono ad incontrarsi. Tuttavia Gemino obietta con ragione, a un'affermazione simile, che noi avremmo dovuto apprendere dagli stessi padri della nostra scienza che nell'acquisizione delle proposizioni della nostra scienza non si deve attribuire peso alcuno a rappresentazioni intuitive puramente probabili… Anche nel nostro caso, il fatto che le rette tendano ad incontrarsi con il diminuire dei due angoli retti è vero e necessario; che però questo tendere all'incontro conduca effettivamente, se si continua a prolungarle, ad una intersezione è soltanto probabile e non necessario, se non si offre un fondamento per mostrare ciò che accade davvero nel caso delle due rette. Infatti, che esistano certe linee che si avvicinano l'un all'altra all'infinito, senza però mai incontrarsi, può suonare improbabile e contrario all'intuizione; tuttavia si tratta di un caso che nel caso di altri tipi di linee è stato appurato (asintoti dell'iperbole). Non sarebbe allora possibile anche nel caso delle rette ciò che si verifica nel caso di quelle linee? Fintanto che noi non abbiamo chiarito in modo definitivo la cosa attraverso una dimostrazione, ciò che noi abbiamo stabilito a proposito di altre linee lascia la nostra intuizione in uno stato di insicurezza e titubanza. Ma quant'anche le ragioni che parlano contro l'unificazione di questi due casi dovessero far su di noi una forte impressione, perché non dovremmo noi a maggior ragione escludere dall'ambito di ciò che ammettiamo questo aspetto di pura probabilità senza fondamento?

se vale l'ipotesi dell'angolo retto: $AH_1 = H_1H_2 = H_2H_3 = \ldots$
se vale l'ipotesi dell'angolo acuto: $AH_1 > H_1H_2 > H_2H_3 > \ldots$
Dimostrazione per intimidazione: banale.

10) Se vale l'ipotesi dell'angolo ottuso o dell'angolo retto allora una perpendicolare e un'obliqua a una retta si incontrano.

Siano BD e AC una perpendicolare e un'obliqua al segmento AB. Consideriamo su AC un segmento AA_1 e sia AH_1 la sua proiezione su AB. Prendiamo[2] un intero n tale che nAH_1 sia maggiore di AB. Su AC si riportino n segmenti uguali AA_1: per la proposizione precedente le loro proiezioni saranno crescenti o costanti. In entrambi i casi, data la scelta di n, la proiezione H_n di A_n sarà a destra di B e quindi la perpendicolare BD sarà interna al triangolo AH_nA_n. Questa perpendicolare è parallela al lato H_nA_n perché entrambi sono perpendicolari alla retta per AB e, nel contesto della geometria assoluta, la proposizione[3] XXVIII è utilizzabile. In definitiva la perpendicolare BD, non potendo incontrare il lato H_nA_n, deve uscire dall'altro lato del triangolo (anche Saccheri, senza rendersene conto, fa uso dell'assioma di Pasch) e quindi nell'ipotesi dell'angolo ottuso o retto una perpendicolare e una obliqua si incontrano. A questo punto Saccheri può enunciare la seguente:



PROPOSIZIONE XIV. *L'ipotesi dell'angolo ottuso è assolutamente falsa perché si distrugge da sola*[4].

Saccheri finalmente è arrivato alla prima contraddizione cercata. Dall'ipotesi dell'angolo ottuso segue il postulato dell'obliqua che abbiamo dimostrato essere equivalente al V postulato. Ma dal V postulato segue immediatamente che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° mentre nell'ipotesi dell'angolo ottuso essa è maggiore di 180°. Con questa proposizione il gesuita ha completato la prima metà dell'opera.

Saccheri procede quindi nel tentativo di ricavare una contraddizione anche dall'ipotesi dell'angolo acuto. Qui le cose si complicano ed egli è costretto ad ammettere che *contro questa ipotesi è stato necessario combattere più a lungo*[5]. Comincia, dalla proposizione XV, quella che egli chiama la *lunga battaglia contro l'ipotesi dell'angolo acuto, che sola può negare la verità dell'assioma*[6]. I ragionamenti divengono assai elaborati e contorti ed è necessario sintetizzarli[7] per evitare di perdersi completa-

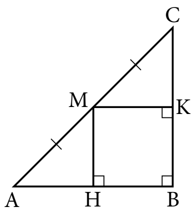
2. Ciò è possibile grazie all'assioma di Archimede: *Dati due segmenti non congruenti esiste sempre un segmento multiplo del minore che supera il maggiore*. Questa legge viene enunciata esplicitamente da Euclide non nel I libro ma nel V, fa parte della definizione IV: *Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente*. Alcuni decenni dopo la comparsa degli Elementi Archimede osservò che era meglio trattarla come un assioma che come una definizione. Essa è in sostanza l'enunciazione del concetto di continuità e si può considerare, in un certo senso, come il sesto postulato di Euclide.
3. Rette che formano con una trasversale angoli corrispondenti uguali o coniugati supplementari sono parallele.
4. *Hypothesis anguli obtusi est absolute falsa, quia se ipsam destruit.*
5. *...contra quam diutius pugnandum fuit* (Prop. XXXIX).
6. *Atque hinc incipit diuturnum proelium adversus hypothesin anguli acuti, quae sola renuit veritatem illius Axiomatis* (3ª aggiunta in sede d'indice).
7. La sintesi è quella di: Agazzi – Palladino, *Le geometrie non Euclidee*, La Scuola, 1998.

HAM = MCK e NBL = KCN. In definitiva AHLB è un quadrilatero di Saccheri con base HL nel quale la somma degli angoli alla sommità per costruzione coincide con la somma degli angoli del triangolo. Abbiamo dimostrato quindi che, se è vera l'ipotesi dell'angolo ottuso, la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180°, tralasciamo la dimostrazione degli altri due casi.

A questo punto Saccheri può applicare il teorema di universalità anche ai triangoli; infatti dal teorema precedente segue immediatamente che, se si verifica l'ipotesi dell'angolo ottuso, retto, acuto, in ogni quadrilatero la somma degli angoli è rispettivamente maggiore, uguale, minore di 360°. Pertanto quello che avevamo concluso a proposito dei quadrilateri vale anche per i triangoli: 7) *se in un solo triangolo la somma degli angoli è maggiore, uguale, minore di 180°, allora lo stesso avviene in ogni triangolo.* É qui che inizia il tentativo vero e proprio di Saccheri. Siccome l'ipotesi dell'angolo retto implica che la somma degli angoli interni di un triangolo sia 180° e questa proposizione è equivalente al V postulato, la strategia del gesuita consiste nel mostrare che le ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso portano a una qualche contraddizione. Una volta ottenuto ciò sarebbe evidente che l'unica ipotesi ammissibile è quella dell'angolo retto e di conseguenza il V postulato risulterebbe finalmente dimostrato. Procediamo.

8) Sia ABC un triangolo rettangolo, M il punto medio dell'ipotenusa AC e H il piede della perpendicolare abbassata da M su AB, se vale l'ipotesi dell'angolo ottuso, retto, acuto, allora AH risulta rispettivamente minore, uguale, maggiore di HB.

a) Abbassiamo da M la perpendicolare a BC e sia K il piede. Mettiamoci nell'ipotesi dell'angolo acuto la quale implica che anche l'angolo HMK sia acuto in quanto è il quarto angolo del quadrilatero trirettangolo HBKM; vogliamo dimostrare che AH è maggiore di HB. In questa ipotesi la somma degli angoli di un triangolo è minore di 180° e ciò vale anche per il triangolo rettangolo MKC. Consideriamo la somma dei tre angoli adiacenti in M e la somma degli angoli del triangolo MKC:



$$\begin{cases} A\hat{M}H + H\hat{M}K + C\hat{M}K = 180° \\ M\hat{C}K + C\hat{K}M + C\hat{M}K < 180° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\hat{M}H + H\hat{M}K = 180° - C\hat{M}K \\ M\hat{C}K + C\hat{K}M < 180° - C\hat{M}K \end{cases} \Rightarrow A\hat{M}H + H\hat{M}K > M\hat{C}K + C\hat{K}M$$

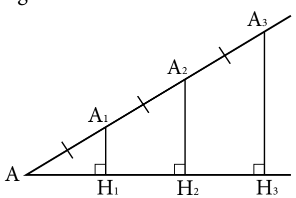
Siccome l'angolo HMK è acuto e CKM retto, a maggior ragione l'angolo AMH è maggiore di MCK. Ma in ogni triangolo ad angolo maggiore è opposto lato maggiore (Prop. XIX) quindi AH è maggiore di MK. Per dimostrare infine che AH è maggiore di HB osserviamo che nell'ipotesi dell'angolo acuto il quadrilatero trirettangolo HBKM ha MK maggiore di HB (punto 4).

b) Facciamo adesso l'ipotesi dell'angolo retto; per lo stesso motivo di prima l'angolo HMK è adesso retto e, essendo la somma degli angoli di un triangolo 180°, gli angoli ANH e MCK sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo CMK. Quindi per il secondo criterio sono congruenti i due triangoli rettangoli AHM e MKC. Ne segue che AH = MK e, poiché MK = HB si ha AH = HB.

c) Come al solito tralasciamo la dimostrazione nell'ipotesi dell'angolo ottuso.

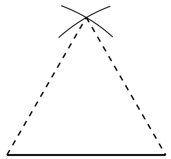
9) Si considerino due rette incidenti e su una di esse segmenti consecutivi uguali, se vale l'ipotesi dell'angolo ottuso, retto, acuto, allora le proiezioni dei segmenti sull'altra retta risultano rispettivamente crescenti, costanti o decrescenti.

Se vale l'ipotesi dell'angolo ottuso: $AH_1 < H_1H_2 < H_2H_3 < \dots$



Vedremo in seguito la presunta "soluzione" di Tolomeo, per il momento ci basti notare come lo stesso Euclide abbia cercato di rinviare l'uso del quinto postulato il più possibile: in effetti le prime 28 proposizioni sono dimostrate senza farvi ricorso. Queste proposizione vanno esaminate con un certo dettaglio in modo da capire fin dove si può arrivare senza l'ausilio del quinto postulato; in pratica dobbiamo rivedere i primi teoremi di geometria imparati all'inizio del liceo, quella parte della geometria che adesso possiamo chiamare col termine altisonante di "geometria assoluta".

Proposizioni che si dimostrano senza il V postulato



La prima proposizione è una costruzione. Le costruzioni in Euclide sono l'equivalente moderno delle "dimostrazioni di esistenza"; non c'è ragionamento sopra figure geometriche di cui egli non abbia eseguito prima la costruzione, nella sua opera non c'è traccia di alcuna "figura ipotetica". La prima ad essere costruita è il triangolo equilatero: dato un segmento Euclide punta il compasso su un estremo tracciando la circonferenza di raggio pari al segmento, poi ripete l'operazione sull'altro estremo, unisce gli estremi con il punto di intersezione delle due circonferenze e ottiene un bel triangolo equilatero con base il segmento dato. Molto elegante solo che, a pensarci bene, chi ci garantisce che il punto di intersezione esista? Certo si vede dal disegno, anzi dal disegno si vede che i punti sono due, ma il disegno, per noi moderni, non è affatto una dimostrazione e serve solo come aiuto per seguirne i passi. Potremmo forse dimostrare l'esistenza del punto di intersezione sulla base di quanto è noto finora, cioè facendo uso soltanto dei postulati e delle nozioni comuni? Provate pure. Vi renderete presto conto che non è possibile. L'esistenza del punto di intersezione sembra ragionevole solo se si guarda la figura, per dimostrarla in modo rigoroso bisogna avere a disposizione altri postulati oltre quelli forniti da Euclide.

La seconda e terza proposizione sono costruzioni che servono per permettere il trasporto di misura e ovviare al problema, già visto nei primi postulati, che il compasso si chiude dopo l'uso. In particolare la proposizione II ci dice come fare per costruire, a partire da un dato punto, un segmento uguale a un segmento dato posto in un'altra regione del piano; esso però non consente di specificare in quale direzione il segmento verrà tracciato. Vi chiederete: ma allora perché Euclide non ha semplicemente postulato fin dall'inizio un compasso con tutte le normali proprietà? Probabilmente solo per una questione di eleganza: non è bello in matematica postulare più dello stretto indispensabile.

La proposizione IV è il famoso primo criterio di congruenza che in termini moderni si enuncia dicendo che se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, allora sono congruenti[2]. Il problema di questa proposizione è che in termini moderni la sua dimostrazione non è assolutamente accettabile. Euclide, senza tanti complimenti, prende il primo triangolo e lo sovrappone al secondo. Nessun postulato e nessuna nozione comune prevedono esplicitamente che si possano spostare e sovrapporre le figure ed egli non si cura di darne alcuna giustificazione. La tecnica di dimostrare teoremi facendo ricorso alla sovrapposizione risaliva a Talele, cioè a circa tre secoli prima, ma già ai tempi di Euclide era apparsa sospetta e veniva usata sempre più di rado. Lo stesso Euclide vi fa ricorso palesemente a malincuore; nel primo libro vi sono teoremi che potrebbero essere dimo-

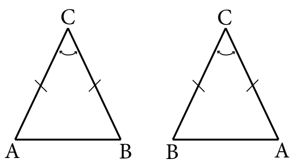
2. Due triangoli si dicono congruenti se hanno rispettivamente uguali gli angoli e se i lati opposti ad angoli uguali sono uguali. Il concetto di congruente non esiste in Euclide che usa indifferentemente il termine uguale sia per indicare la congruenza che l'equivalenza.

strati con quattro passaggi mediante questa tecnica tuttavia egli la usa solo in questa proposizione e nella ottava. Probabilmente Euclide aveva bisogno di questo criterio ma non voleva metterlo fra i postulati dal momento che questa proposizione non ha la semplicità che un assioma sembra dover possedere. Oltretutto si sentiva già in colpa per il complicato quinto postulato che non era riuscito a dimostrare e quindi si risolse, suo malgrado, ad utilizzare questa tecnica che appare in netto contrasto con il carattere statico di tutte le altre proposizioni.
Dal Rinascimento in poi la sovrapposizione è stata severamente criticata sia dai matematici che dai filosofi; Schopenhauer, ad esempio, nel 1818 scrive:

> Sono sorpreso del fatto che, invece di attaccare il quinto postulato, non si critichi piuttosto la quarta nozione comune: "Figure che coincidono sono figure uguali fra loro". Infatti il concetto di coincidenza è una mera tautologia oppure qualcosa di interamente empirico che non appartiene all'intuizione pura ma all'esperienza sensoriale esterna.

Hilbert nel 1899 riscrive i fondamenti della geometria e pone, come la maggior parte dei matematici moderni, i criteri di congruenza dei triangoli fra gli assiomi.

Passiamo ora alla proposizione V che afferma che i triangoli isosceli hanno gli angoli alla base uguali. La maggior parte degli autori dimostra questo teorema più avanti quando si hanno maggiori strumenti a disposizione, per esempio dopo aver costruito la bisettrice (proposizione IX) è immediato far vedere che i due triangoli che si formano sono congruenti per primo criterio. Euclide ricorre ad una lunga e laboriosa dimostrazione che venne chiamata, sembra da Bacone intorno al 1200, *pons asinorum* proprio per le difficoltà che si incontravano nel dimostrarlo. Comunque Pappo di Alessandria, nel tardo periodo ellenistico, ne da una elegante dimostrazione facendo ricorso al solo primo criterio: sia ABC isoscele con AC = BC; i due triangoli ABC e BAC sono congruenti per il primo criterio in quanto l'angolo in C è lo stesso. Hanno dunque tutti gli angoli uguali.



La prossima proposizione è la prima ad essere dimostrata per assurdo e si tratta dell'inverso della proposizione V. Ricordiamo che l'inverso di un teorema si ottiene scambiando la tesi con l'ipotesi e richiede sempre una apposita dimostrazione; in questo caso l'ipotesi è che un triangolo abbia due angoli uguali, la tesi è che i lati opposti agli angoli siano uguali.

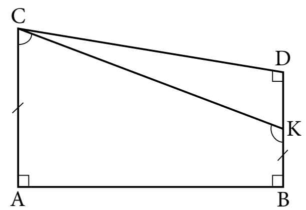
La proposizione VII è un lemma che serve per dimostrare la successiva, il terzo criterio di congruenza dei triangoli. Questa proposizione è un modo per dire che i triangoli sono rigidi, cioè che fra tutte le figure che si possono ottenere incernierando delle aste quelle con tre lati non si possono più muovere, cosa molto utile da sapere quando si montano i mobili di Ikea. La VIII, cioè il terzo criterio, come abbiamo già detto, fa ricorso ancora alla sovrapposizione e presenta gli stessi problemi già discussi.

A questo punto siamo in grado di fare ben cinque cose: tracciare rette (postulato I), prolungarle (postulato II), tracciare circonferenze (postulato III), costruire triangoli equilateri (proposizione I), riportare segmenti (proposizione II e III). Passiamo ora alle successive due proposizioni: la costruzione della bisettrice e del punto medio. Queste costruzioni sono estremamente interessanti dal momento che ci obbligano ad esplicitare ulteriori postulati dati per scontati. Per noi moderni è ovvio che si possa dividere un angolo a metà in quanto siamo abituati a pensare gli angoli e i segmenti come entità misurabili con numeri. Ora, visto che i numeri esistono indipendentemente dalla geometria e si possono dividere tranquillamente per 2, riteniamo ovvio che lo stesso debba valere anche per gli angoli. Euclide tuttavia intende un'altra cosa quando parla di bisecare un angolo: egli vuole

3) Se la sommità è maggiore, uguale o minore della base, allora gli angoli alla sommità sono rispettivamente acuti, retti o minori.

É l'inverso della proposizione precedente, si dimostra semplicemente osservando che, se la sommità è uguale alla base gli angoli alla sommità non possono essere ottusi perché allora la sommità sarebbe minore della base contro l'ipotesi; non possono essere acuti perché la sommità sarebbe maggiore della base contro l'ipotesi. Dunque sono retti. Nello stesso modo si dimostrano gli altri due casi.

4) Se il quarto angolo di un quadrilatero con tre angoli retti (trirettangolo) è acuto allora ciascuno dei due lati che gli stanno intorno è maggiore del suo opposto; se ottuso, minore.



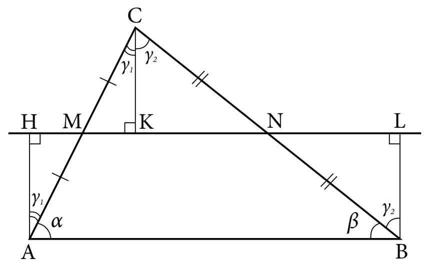
La dimostrazione è analoga alle precedenti, sia ABDC un quadrilatero con gli angoli in A, B, D retti, facciamo vedere per esempio che, se l'angolo in C è acuto allora AC è maggiore di BD. Procediamo per assurdo, neghiamo la tesi: sia AC < BD; su BD allora prendiamo un punto K tale che BK sia uguale a AC. Uniamo K con C e otteniamo il solito quadrilatero di Saccheri con gli angoli alla sommità uguali. Essi sono allo stesso tempo acuti perché l'angolo ACK è una parte dell'angolo in C che lo è per ipotesi, e anche ottusi perché BKC è l'angolo esterno del triangolo rettangolo CKD.

5) Se in un quadrilatero di Saccheri gli angoli alla sommità sono acuti, retti, ottusi, allora lo stesso avviene in ogni altro quadrilatero di Saccheri.

Questo in realtà non è un teorema di geometria, sembra piuttosto un teorema di logica matematica, in particolare un teorema di universalità. Saccheri dimostra che una determinata proprietà geometrica non può essere limitata ad un singolo caso particolare; in altre parole non può succedere che in alcuni quadrilateri birettangoli isosceli gli angoli alla sommità siano retti, in alcuni ottusi e in altri acuti, quello che succede in un solo quadrilatero di Saccheri deve realizzarsi in tutti gli altri quadrilateri. I tre casi saranno chiamati rispettivamente *ipotesi dell'angolo acuto, dell'angolo retto e dell'angolo ottuso.*

6) Se vale l'ipotesi dell'angolo ottuso, retto, acuto, allora la somma degli angoli di un triangolo è rispettivamente maggiore, uguale, minore di 180°.

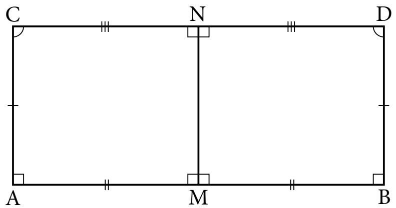
Consideriamo il caso di un triangolo acutangolo. Siano M e N i punti medi dei lati AC e BC; dai vertici del triangolo si abbassino le perpendicolari AH, BL e CK sulla retta passante per M e N. Consideriamo i triangoli rettangoli AHM e CKM: essi hanno l'ipotenusa e un angolo acuto uguale, sono quindi congruenti[1] e lo stesso vale per i triangoli CKN e BLN. Da ciò si ricava che AH = BL e che l'angolo



1. Il lato non è quello compreso fra i due angoli, ma non fa niente perché in geometria assoluta il secondo criterio vale nella sua generalità (vedi nota 4, cap. 1).

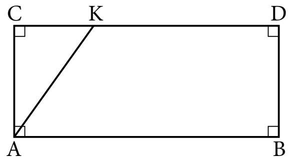
zione di considerare un quadrilatero di Saccheri un rettangolo. La costruzione del rettangolo viene eseguita nella proposizione XLVI e ovviamente si basa sul V postulato; in geometria assoluta possiamo certamente costruire un quadrilatero di Saccheri, ma dire poi che questa figura è un rettangolo è cosa tutta da dimostrare. Passiamo ora a vedere altre proprietà di questi quadrilateri.

1) Se congiungiamo i punti medi della base e della sommità di un quadrilatero di Saccheri si ottiene un segmento perpendicolare a entrambi.

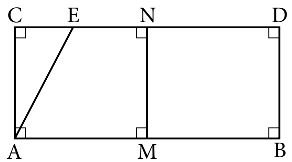


I triangoli CAM e MBD sono congruenti per il primo criterio da cui MC = MD; anche i triangoli MNC e MND sono congruenti per il terzo criterio. Allora gli angoli MNC e MND essendo uguali e adiacenti sono retti. Sfruttando il fatto che gli angoli alla sommità sono uguali si può ripetere il ragionamento e concludere che anche gli angoli in M sono retti.
La figura in alto riassume le proprietà dei quadrilateri di Saccheri dimostrate finora; ribadiamo fino alla noia più assoluta che ci sono cose che la nostra intuizione euclidea ci suggerisce con forza e che non abbiamo dimostrato (e vi sfido a fare), per esempio che la sommità è uguale alla base, o che gli angoli alla sommità sono retti. In effetti la dimostrazione di uno qualunque di questi fatti equivarrebbe alla dimostrazione del V postulato e Saccheri lo sapeva bene.

2) Se gli angoli alla sommità sono acuti, retti o ottusi, allora la sommità è rispettivamente maggiore, uguale o minore della base.



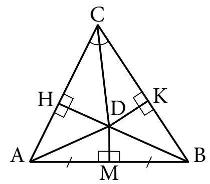
a) Supponiamo che gli angoli alla sommità siano retti; per dimostrare che la sommità è uguale alla base procediamo per assurdo. Supponiamo che la sommità sia maggiore della base e consideriamo sulla sommità il punto K tale che KD = AB. Il quadrilatero ABDK è un quadrilatero di Saccheri sulla base BD e quindi gli angoli gli angoli DKA e KAB sono uguali ma ciò è assurdo in quanto KAB è acuto (essendo parte dell'angolo retto CAB) e DKA è ottuso (essendo esterno al triangolo rettangolo ACK). In modo analogo si può dimostrare che la sommità non può essere minore della base.



b) Supponiamo che gli angoli alla sommità siano ottusi, vogliamo dimostrare che la base è maggiore della sommità. Consideriamo i punti medi M e N della base e della sommità. AM non può essere uguale a CN poiché altrimenti il quadrilatero AMNC sarebbe un quadrilatero di Saccheri con base MN e gli angoli alla sommità sarebbero uguali mentre uno è retto e l'altro ottuso. Non può essere neanche CN maggiore di AM dato che in questo caso esisterebbe su CN un punto E tale che NE = MA, e il quadrilatero AMNE sarebbe un altro quadrilatero di Saccheri sulla base MN e l'angolo NEA sarebbe uguale a EAM. Ma il primo angolo è ottuso essendo esterno al triangolo ACE e il secondo è acuto in quanto parte dell'angolo retto MAC. Quindi CN è minore di AM e, di conseguenza, CD è minore di AB

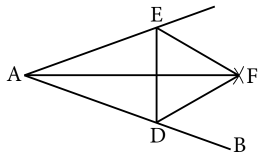
c) Il caso in cui gli angoli alla sommità sono acuti si tratta in modo analogo al precedente e si ottiene che la sommità è maggiore della base.

mettersi a tavolino e giocare con la riga e il compasso fino a trovare un procedimento geometrico per tagliarlo precisamente a metà. Ora, la bisezione sembra a prima vista una cosa abbastanza facile ma non è detto che con riga e compasso si possa fare tutto; la trisezione per gli angoli, ad esempio, non è possibile[3] (mentre lo è per i segmenti). Quindi, mentre per noi è evidente che si possa dividere un angolo in due parti uguali e, in generale in quante parti vogliamo, per Euclide un ente geometrico (come la bisettrice) esiste solo se è possibile disegnarlo mediante una determinata procedura. Il criterio di esistenza come costruibilità ci appare al giorno d'oggi un po' troppo restrittivo.



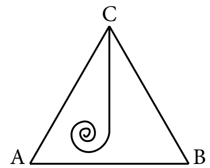
Le costruzioni comunque sono importanti; se non si fa attenzione c'è il rischio di arrivare ad assurdità come la seguente: prendiamo un triangolo qualsiasi ABC; sia D il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in C e dell'asse della base AB; siano poi H e K le proiezioni di D sui lati AC e CB. Allora, i triangoli CHD e CKD sono congruenti e quindi CH = CK e HD = KD; anche i triangoli ADM e BDM sono congruenti e quindi AD = BD; a questo punto i triangoli AHD e BKD sono anche loro congruenti e quindi AH = BK, abbiamo dimostrato che tutti i triangoli sono isosceli!!! Pensateci bene, Euclide avrebbe utilizzato riga e compasso per costruire la bisettrice e non sarebbe certo incappato in questo errore madornale.

Vediamo ora come si costruisce la bisettrice: scegliamo un punto a caso su un lato dell'angolo.



In realtà non sta scritto da nessuna parte che sia possibile scegliere un punto a caso né su un segmento, né in generale da nessuna altra parte. Prendiamo atto di questa possibilità per la quale servirebbe un altro postulato e procediamo perché il bello viene con la proposizione successiva. Intanto ecco la costruzione della bisettrice: scelto D a caso sul lato AB, sull'altro lato prendiamo un segmento AE uguale ad AD; congiungiamo D con E; su DE costruiamo un triangolo equilatero DEF; tracciamo AF e otteniamo la bisettrice perché i triangoli ADF e AEF sono congruenti per il terzo criterio.

Per la costruzione del punto medio (la proposizione X) prendiamo un segmento AB, costruiamoci sopra il solito triangolo equilatero ABC; tracciamo la bisettrice dell'angolo ACB e prolunghiamola finché non incontri il segmento AB. Eccolo il problema: chi ci garantisce che il prolungamento incontrerà il segmento AB? Come possiamo escludere che esso non si perda all'interno del triangolo avvolgendosi in qualche modo a spirale? A questo punto immagino già cosa state pensando "professore, ho capito la sua smania di esplicitare qualsiasi cosa, ma c'è un limite a tutto, la bisettrice è una retta e le rette vanno dritte". Vi ricordo però che la retta, a parte gli oscuri tentativi di Euclide per dire che va "dritta", è per noi un concetto primitivo e quindi formalmente non sappiamo nulla su di essa; ogni ulteriore proprietà che vogliamo attribuirle dovrà essere *esplicitamente* enunciata mediante appositi postulati. Quello che sappiamo sulla retta lo possiamo dedurre solo dai postulati i quali, in un certo senso, ne forniscono una definizione implicita. Ad esempio, possiamo dire che la retta è "qualcosa" che per due punti ne passa una e una sola. Per risolvere il problema della costruzione della bisettrice abbiamo quindi bisogno di un altro postulato che ci dica che se una retta entra in un triangolo allora



3. Questo problema, insieme alla quadratura del cerchio e alla duplicazione del cubo, è uno dei tre problemi classici dell'antichità rimasti insoluti. Comunque se non rispettiamo le regole del gioco e utilizziamo una riga graduata la trisezione è possibile, si veda: http://it.wikipedia.org/wiki/Trisezione_dell'angolo.

possiamo stare sicuri che essa ne esce pure; questo è il famoso assioma di Pasch, formulato da Moritz Pasch nel 1882. Sebbene il postulato ci garantisca che la bisettrice incontrerà il triangolo in qualche punto non ci dice però in quale; potrebbe incontrare non il lato opposto ma uno dei due adiacenti. Tuttavia questo non è un problema perché a questo punto si può utilizzare il postulato citato precedentemente, quello che dice che per due punti passa una sola retta.

Con le proposizioni XI e XII impariamo a costruire le perpendicolari ad una retta sia dal basso verso l'alto (cioè se il punto appartiene alla retta) che dall'alto verso il basso. La proposizione successiva, la XIII, è un'altra di quelle che non si capisce bene che ci stia a fare. L'enunciato è il seguente:

> XIII. Se una retta viene innalzata su un'altra retta, verrà a formare con essa o due angoli retti o angoli la cui somma è uguale a due retti.

Questa proposizione è per noi evidente, dato che fra gli angoli consideriamo anche quello piatto. Questo angolo però viene esplicitamente escluso da Euclide il quale nella definizione VIII scrive:

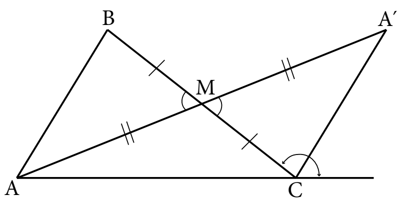
> VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.

Come si vede oltre a non concepire l'angolo piatto la definizione è tautologica perché si sostituisce il concetto di angolo con quello non definito di inclinazione. Non concependo l'angolo piatto Euclide è costretto a dimostrare quello che per noi è evidente, cioè che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti.

La proposizione successiva è l'inverso della XIII, mentre la proposizione XV è il teorema degli angoli opposti al vertice. La XVI è il famoso teorema dell'angolo esterno:

> XVI. In un qualunque triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni e opposti.

Questo teorema, che sarebbe meglio chiamare teorema dell'angolo esterno maggiore, è una delle proposizioni più importanti del primo libro poiché rappresenta una proposizione chiave per la teoria delle parallele. La dimostrazione di Euclide è la seguente. Sia ABC il triangolo; si costruisca il punto medio M del lato BC. Si unisca A con M e si prolunghi in A′ in modo che AM sia uguale a MA′. I triangoli BMA e CMA′ sono congruenti per il primo criterio dunque l'angolo MCA′ è uguale all'angolo in B, ma l'angolo MCA′ è una parte dell'angolo esterno in C che risulta quindi maggiore dell'angolo in B. Il ragionamento va poi ripetuto per l'angolo in A. Anche qui i problemi non mancano: chi ci dice che il punto A′ cadrà dentro l'angolo esterno e non fuori?



La proposizione XVII è l'inverso del quinto postulato; quest'ultimo afferma che se una trasversale, intersecando due rette, forma angoli coniugati minori di un angolo piatto allora le due rette si intersecano formando un triangolo. La proposizione XVII afferma l'inverso cioè che, se le rette formano un triangolo allora la somma dei due angoli è minore di 180° o in generale:

> XVII. In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.

Questa proposizione, che è un corollario immediato della proposizione precedente, permette di classificare i triangoli secondo i loro angoli. Infatti, se la somma di due angoli deve essere minore di due retti, non possono esistere in un triangolo due angoli retti, o due ottusi o uno retto e uno ottuso.

3. Il tentativo di Saccheri

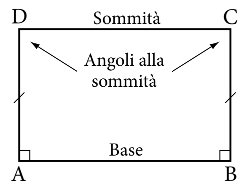
Nel 1733 viene pubblicata a Milano l'opera del gesuita Gerolamo Saccheri (1667–1733) dal titolo *Euclides ab omni naevo vindicatus* cioè "Euclide liberato da ogni macchia", il più serio tentativo mai fatto fino ad allora per dimostrare il V postulato. I "nei", cioè le imperfezioni di cui si parla nel titolo, sono, oltre ad alcune lacune nella teoria delle proporzioni, proprio l'insoddisfacente statuto logico del V postulato. Questa sarebbe la "macchia" più vistosa dalla quale gli Elementi andrebbero emendati. Nel proemio infatti Saccheri ribadisce che il V postulato non ha dignità per sedere accanto agli altri:

> Nessuno invero mette in dubbio la verità del postulato esposto; ma in ciò solo accusano Euclide, che abbia usato il nome di assioma, quasi fosse certo che, intesi rettamente i meri termini, facesse fede in se stesso.

E visto che tutte le dimostrazioni dirette sono fallite egli cambia strategia e procede per assurdo: se dalla negazione del V postulato sarà possibile ricavare una qualche contraddizione, allora il V postulato sarà finalmente dimostrato. Di fatto egli ottiene strane e paradossali conseguenze che alla fine, per pregiudizio o disperazione, cercherà di interpretare come assurdità, ma in verità nessuna di queste è una vera assurdità logica, anzi esse tutte insieme costituiscono il primo piccolo nucleo di geometria non euclidea.

Punto di partenza di Saccheri è la geometria assoluta, ossia, ricordiamolo ancora una volta, tutte le prime 28 proposizioni. Sappiamo che, se due rette formano angoli alterni interni uguali sono parallele ma non sappiamo dimostrare l'inverso. Vi avverto che sarà molto difficile procedere avendo a disposizione solo i pochi elementi della geometria assoluta; infatti i teoremi che si deducono dal V postulato affermano cose che noi riteniamo assolutamente "vere". Fin dall'infanzia siamo stati abituati ad un mondo in cui vale solo la geometria euclidea e ci è difficile immaginare qualcosa di differente. Per poter continuare dovremo quindi – *extrema ratio* – diventare sordi alle lusinghe dell'intuizione e procedere ad una scissione forzata delle nostre facoltà mentali che si rivelerà alquanto sconcertante e difficile da mantenersi. Sarà dura ma cercate di non perdervi; coloro che con infinita pazienza riusciranno ad arrivare alla fine del capitolo rappresentano la differenza fra il sapiente filosofo che parla e l'arido matematico che dimostra.

Saccheri inizia l'opera costruendo un quadrilatero che ora porta il suo nome. In questo quadrilatero (detto anche birettangolo isoscele) due lati opposti sono uguali e sono entrambi perpendicolari ad uno degli altri lati che chiamiamo base. Il lato opposto alla base è detto sommità (ma non è detto che la base debba stare per forza in basso), gli angoli adiacenti alla sommità sono chiamati angoli alla sommità. Questo quadrilatero, se ci pensate bene, lo abbiamo già incontrato quando abbiamo parlato di Vitale Giordano e abbiamo visto come sia possibile dimostrare che gli angoli alla sommità siano uguali fra loro ma non che siano retti. Vi prego, di nuovo, di resistere alla tenta-



1733; Adrien-Marie Legendre, inizio sec. XIX)

7b. Esiste almeno un triangolo per il quale la somma degli angoli è 180°. (Come sopra)

7c. La somma degli angoli interni è uguale per tutti i triangoli[4] (Adrien-Marie Legendre).

7d. Esiste almeno un triangolo per il quale la somma degli angoli assume il suo valore massimo.

8. Non c'è alcuna unità di misura assoluta della lunghezza. (Johann Eeinrich Lambert, 1766; Adrien-Marie Legendre, inizio sec. XIX)

9a. Ogni retta tracciata per un punto interno a un angolo, se prolungata a sufficienza, incontra almeno un lato dell'angolo (o il suo prolungamento). (J. F. Lorenz, 1791)

9b. Per ogni punto interno a un angolo minore di 60° è sempre possibile tracciare una retta che incontri entrambi i lati dell'angolo (o eventualmente i loro prolungamenti). (Adrien-Marie Legendre, inizio sec. XIX)

10. È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque area data. (Karl Friedrich Gauss, 1799)

11. Le traslazioni e le rotazioni di una retta nel piano sono movimenti indipendenti. (Bernhard Friedmich Thibaut, 1809)

12. Dati tre punti non giacenti sulla stessa retta è sempre possibile tracciare un cerchio passante per tutti e tre i punti. (Adrien-Marie Legendre, Wolfgang Bolyai, inizio sec. XIX)

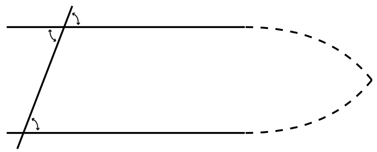
All'inizio dell'ottocento cominciò ad affacciarsi l'idea che il V postulato fosse veramente indimostrabile facendo ricorso solo ai primi quattro. Si badi bene che il problema dell'indimostrabilità di una proposizione non è per niente banale. Se vogliamo stabilire che una proposizione è dimostrabile basta mostrarne una bella dimostrazione; per fare il contrario non basta dire che non siamo riusciti a dimostrarla ma bisogna *dimostrare che non è possibile dimostrarla*. Più precisamente, la dimostrazione di una proposizione è un problema che si pone all'interno di una teoria, la dimostrazione che una proposizione è indimostrabile invece ha come oggetto non la proposizione stessa ma le dimostrazioni della teoria; è quello che si chiama un problema metateorico: bisogna far vedere che fra tutte le possibili dimostrazioni non c'è né nessuna che permetta di ottenere la proposizione in questione.

Comunque, fra tutti i tentativi che abbiamo passato in rassegna finora, nessuno fa uso di una strategia utilizzata frequentemente sia da Euclide che da altri: la dimostrazione per assurdo. É una strategia molto efficiente, che spesso produce dimostrazioni estremamente eleganti. Ci prova Gerolamo Saccheri, che cercherà di ottenere una qualche assurdità logica dalla negazione del V postulato.

4. Per questa proposizione e la successiva si vedano gli esempi 2 e 3 di pag. 17.

La proposizione XVIII e XIX affermano che in un triangolo a lato maggiore è opposto angolo maggiore e viceversa. La XX ci dice che in un triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del rimanente. Questa è la famosa disuguaglianza triangolare ed è quanto di più vicino Euclide abbia detto rispetto al postulato archimedeo che la retta è il cammino più breve fra due punti. A proposito di questo teorema Proclo ci riferisce che gli epicurei erano soliti scherzarci sopra dicendo che esso era noto persino ad un asino. Infatti, se sta in un angolo di un cortile e vede della paglia nell'angolo opposto, ci va tagliando per la diagonale, e non rasenta certo i muri. Proclo giustamente osserva che la pura e semplice intuizione della verità di un teorema è cosa ben diversa dalla sua dimostrazione rigorosa e dalla consapevolezza del perché esso sia vero. Inoltre, come abbiamo visto, non è elegante postulare più dello stretto indispensabile. Tralasciamo la proposizione XXI che non viene applicata nel primo libro e passiamo alla XXII nella quale si costruisce un triangolo dati tre segmenti (con la condizione che i segmenti rispettino la disuguaglianza triangolare). La proposizione XXIII è l'analoga per gli angoli della III: ci permette di riprodurre dove vogliamo un angolo posto altrove. La proposizione XXIV afferma che, se due triangoli hanno due lati uguali e l'angolo compreso disuguale, il terzo lato è disuguale nello stesso senso. Nella proposizione XXV si inverte il risultato; la XXVI è il noto II criterio[4] di congruenza dei triangoli. Siamo finalmente arrivati alla proposizione XXVII: il teorema diretto delle parallele:

> XXVII. Se due rette qualsiasi tagliate da una trasversale formano con quest'ultima angoli alterni interni uguali, le due rette sono parallele.



Dimostriamolo: si supponga per assurdo che le rette non siano parallele ma si incontrino formando un triangolo; in questo triangolo vi sarebbe un angolo esterno uguale ad uno interno, il che va contro il teorema dell'angolo esterno.

La proposizione successiva è un semplice corollario che riporta la condizione di parallelismo agli angoli corrispondenti o ai coniugati. Finisce con questa proposizione la geometria assoluta. L'inverso della proposizione XXVII, cioè il teorema che se due rette sono parallele allora formano angoli alterni interni uguali, resiste a qualsiasi tentativo di dimostrazione e va quindi accettata per vera senza dimostrazione, in poche parole va aggiunta ai postulati. Questa mossa non è indolore in quanto i postulati, con questo completamento, perdono irrimediabilmente la loro lapidaria bellezza.

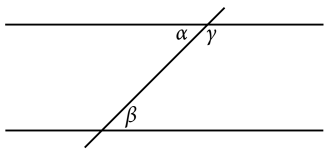
4. Euclide tratta separatamente i due casi: quando il lato uguale è compreso fra i due angoli uguali e quando è opposto a uno di essi. Noi siamo abituati a pensare che il secondo criterio valga solo nel primo caso (ALA) e che per il secondo (AAL) si debba far ricorso al noto teorema che la somma degli angoli interni è 180°. Falso: anche in geometria assoluta il lato può stare dovunque, nel cap. 3 utilizzeremo il criterio nella sua generalità.

2. Tentativi di dimostrazione del V postulato

Siamo giunti finalmente alla proposizione XXIX nella quale per la prima volta compare il V postulato:

XXIX. Una trasversale forma con due rette parallele angoli alterni interni uguali[1].

L'ipotesi adesso è che le rette non si incontrino, la tesi è che gli angoli α e β siano uguali. Supponiamo per assurdo che siano disuguali e che, per esempio, α sia maggiore di β. Siccome $\alpha + \gamma$ sono adiacenti e quindi pari a 180° ne segue che $\beta + \gamma$ è minore di 180°. Ma allora, per il V postulato, le due rette dovrebbero incontrarsi, il che va contro l'ipotesi. A ben vedere questa dimostrazione è un semplice corollario del V postulato; Euclide poteva tranquillamente scegliere questa proposizione (che è più breve) al posto dell'altra: questione di gusti. A noi moderni comunque non piacciono nessuna delle due e riserviamo il prestigio di sedere fra i postulati ad una proposizione ancora più semplice diffusa dal matematico scozzese John Playfair (1748–1819):

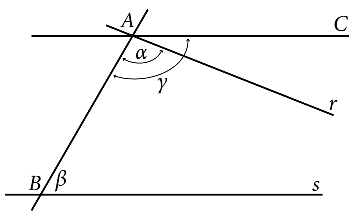


Per un punto esterno ad una retta passa una sola parallela.

L'esistenza di una parallela viene dimostrata da Euclide, senza far ricorso al V postulato, nella proposizione XXXI, ma l'unicità non è né postulata né dimostrata. Il primo ad accorgersi dell'equivalenza fra il V postulato e l'unicità della parallela fu lo stesso Proclo. Si noti che il concetto di equivalenza fra proposizioni è un concetto relativo; infatti due proposizioni si dicono equivalenti se da una si può ricavare l'altra e viceversa. Dimostriamo l'equivalenza fra il V postulato e l'unicità della parallela. Bisogna far vedere che:

a) dal V postulato segue l'unicità della parallela. Infatti, supponiamo per assurdo che per un punto P passino due rette parallele ad una stessa retta. Esse sono allo stesso tempo incidenti (perché passano per P) e parallele (mi sono dimenticato di dire che la prop. XXX afferma proprio che rette parallele ad una stessa retta sono parallele fra loro). Il che è assurdo.

b) Dall'unicità della parallela segue il V postulato. Infatti, siano r e s due rette che, tagliate dalla trasversale AB, formino due angoli coniugati interni α e β tali che la loro somma sia minore di 180° (vedi figura). Sia AC la retta per A che forma con AB un angolo γ tale che $\gamma + \beta = 180°$. AC risulta distinta da r, poiché $\gamma > \alpha$, e risulta parallela a s per la proposizione XXVIII. Dall'unicità della parallela segue allora che r non può essere parallela a s e che esse si incontrano come richiesto dal V postulato.

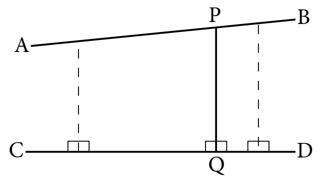


1. E altra roba che omettiamo.

Proposizioni equivalenti al V postulato

Tralasciamo per il momento il tentativo di Saccheri, al quale dedicheremo il prossimo capitolo; alla fine del secolo XVIII si era arrivati alla situazione che, per quanto i tentativi di dimostrare il V postulato sembrassero avvicinarsi sempre più alla meta e la dimostrazione apparisse quasi a portata di mano c'era sempre qualche difficoltà che si intrometteva all'ultimo momento cosicché ciò che si riusciva ad ottenere risultava in definitiva un'altra proposizione ad esso equivalente. Ecco di seguito un elenco di proposizioni equivalenti raggruppate in base alla loro somiglianza superficiale (dal Trudeau).

- 1a. Rette parallele sono equidistanti. (Posidonio, I sec. a.C.)
- 1b. La totalità dei punti equidistanti da una retta data, e dalla medesima parte di essa, costituisce una linea retta. (Cristoforo Clavio, 1574)
- 1c. In ogni quadrilatero con due lati uguali perpendicolari a un terzo lato vi è almeno un punto sul quarto lato tale che la perpendicolare al lato opposto tracciata dal punto stesso sia uguale ai due lati uguali. (Vitale Giordano, 1680)
- 1d. Esiste almeno una coppia di rette equidistanti.
- 2. La distanza fra due rette infinite parallele [può variare, ma] rimane sempre minore di una certa distanza fissata. (Proclo, sec. V)
- 3a. (Proposizione XXX) Rette parallele alla stessa retta sono parallele fra loro.
- 3b. Date due rette parallele, una terza retta che ne incontri una incontrerà, purché prolungata a sufficienza, anche l'altra (o il suo prolungamento).
- 3c. Per un punto non giacente su una retta data né sul suo prolungamento, non è possibile tracciare più di una parallela alla retta data. (A tale enunciato diede ampia diffusione John Playfair verso la fine del sec. XVIII)
- 4a. Se due rette (AB e CD) sono tagliate da una terza (PQ) che è perpendicolare a una soltanto di esse (CD), allora le perpendicolari tracciate da AB a CD sono minori di PQ dalla parte di PQ in cui AB forma un angolo acuto con PQ e sono maggiori di PQ dalla parte in cui AB forma un angolo ottuso. (Nasir al-Din, sec. XIII)



- 4b. Rette che non sono equidistanti convergono in una direzione e divergono nell'altra. (Pietro Antonio Cataldi, 1603)
- 5a. Su una retta finita data è sempre possibile costruire un triangolo simile a un triangolo dato. (John Wallis, 1663; Lazare-Nicholas-Marguerite Carnot, 1803; Adrien-Marie Legendre, 1824)
- 5b. Esiste una coppia di triangoli simili e non congruenti. (Gerolamo Saccheri, 1733)
- 6a. In ogni quadrilatero avente due lati uguali e perpendicolari a un terzo lato gli altri due angoli sono retti. (Gerolamo Saccheri, 1733)
- 6b. In ogni quadrilatero con tre angoli retti, anche il quarto angolo è retto. (Alexis-Claude Clairaut, 1741; Johann Heinrich Lambert, 1766)
- 6c. Esiste almeno un rettangolo. (Gerolamo Saccheri, 1733)
- 7a. (Proposizione XXXII) La somma degli angoli di ogni triangolo è 180°. (Gerolamo Saccheri,

Esempio 3): dimostriamo che *esiste un triangolo per il quale la somma degli angoli è uguale a 180°*. Questo esempio necessita di una breve premessa; nel prossimo capitolo vedremo come sia possibile dimostrare che *se in un solo triangolo la somma degli angoli è maggiore, uguale, minore di 180°, allora lo stesso avviene in ogni triangolo* (G. Saccheri, Prop. 7), ovvero non è possibile che per alcuni triangoli la somma è uguale a 180°, per altri è minore e per altri ancora è maggiore. Successivamente Saccheri riesce a dimostrare anche che *la somma degli angoli di un triangolo non può essere maggiore di 180°* (Prop. XIV). A questo punto restano solo due possibilità: per tutti i triangoli tale somma è uguale a 180° oppure per tutti i triangoli essa è minore di 180°. Allora il V postulato sarebbe definitivamente dimostrato se si trovasse un solo esempio di triangolo la somma dei cui angoli valga 180°.

Siccome la somma degli angoli di un triangolo non supera 180°, supponiamo che il triangolo ABC della figura precedente sia tale che la somma dei suoi angoli sia massima; indichiamo tale somma con *a*. Se di tali triangoli ne esiste più d'uno, prendiamone uno a caso. Quindi, la somma degli angoli di ogni altro triangolo non supera *a*; per cui, considerando sempre la figura dell'esempio precedente, si ha:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 \le a; \quad \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 \le a.$$

Sommiamo membro a membro ottenendo: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 \le 2a$; ma per ipotesi $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = a$ e, inoltre, $\angle 5 + \angle 6 = 180°$; di conseguenza $a + 180° \le 2a \Rightarrow a \ge 180°$. Ma *a* non può essere maggiore di 180° quindi dobbiamo avere $a = 180°$, ossia la somma degli angoli del triangolo ABC vale proprio 180°.

Questo tipo di errore è stato ripetuto molte volte nella storia della matematica: abbiamo accettato senza alcuna giustificazione che gli elementi di un dato insieme infinito debbano necessariamente includere un termine massimo (o minimo).

Ora, nessuno cercherebbe il termine massimo nella successione dei naturali

$$1, 2, 3, \ldots$$

dal momento che i numeri crescono sempre e la successione si può proseguire all'infinito. Già la seguente successione è più interessante

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \ldots$$

benche sia limitata e si avvicini sempre più ad 1, fra i suoi termini non ne esiste alcuno massimo.

Più vicino al nostro problema è il seguente esempio di geometria: consideriamo l'angolo interno di un poligono regolare di *n* lati, che vale:

$$\left[\frac{180(n-2)}{n}\right]^{\circ}$$

Quest'angolo è sempre minore di 180° ma non esiste alcun poligono regolare con un angolo interno massimo.

Il punto debole della dimostrazione in esame è proprio l'ipotesi che fra tutti i triangoli, la cui somma degli angoli interni sappiamo essere non maggiore di 180°, debba esisterne uno per il quale questa somma assuma il suo valore massimo. Questa è una affermazione non dimostrata, che noi potremmo accettare come proposizione equivalente al V postulato.

Torniamo per un momento alla proposizione XXX che rappresenta la proprietà transitiva del parallelismo: rette parallele ad una stessa retta sono parallele. Per dimostrarla ovviamente va tracciata una trasversale alle tre rette; anche qui la domanda è sempre la stessa: chi ci garantisce che, date tre rette, esista sempre una retta che le interseca tutte e tre? L'esistenza della trasversale, come l'unicità della parallela è un'altra proposizione equivalente[2] al V postulato (e ne vedremo molte altre) e può essere utilizzata al suo posto qualora si ritenga più semplice.

Concludiamo l'analisi delle proposizioni euclidee con la proposizione XXXII che dovrebbe esservi abbastanza nota.

> XXXII. In qualsiasi triangolo, se si prolunga uno dei lati: (a) l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni opposti; (b) la somma degli angoli interni è pari a 180°.

Questo è primo teorema degli Elementi che afferma qualcosa di assolutamente non evidente e ovviamente richiede il V postulato. In generale i triangoli non hanno uguali né gli angoli, né i lati, né il perimetro o l'area, perché dovrebbero avere sempre costante la somma dei loro angoli? C'è una bella differenza fra questo teorema e quello che afferma che gli angoli opposti al vertice sono uguali; sarà un caso, ma appena introdotto il V postulato salta fuori un teorema assolutamente non banale. Il teorema poi vale doppio: la prima parte è il teorema dell'angolo esterno vero e proprio e ora appare chiaro perché la proposizione XVI andava chiamata teorema dell'angolo esterno maggiore. Questo è il vero teorema dell'angolo esterno, l'altro è solo un risultato parziale valido nella geometria assoluta. Anche la proposizione XVII, dove veniamo informati che la somma di due angoli è sempre minore di 180° è un risultato parziale, che ci sta a fare se poco dopo si dimostra che la somma di tutti e tre vale proprio 180° ?
La risposta ormai è chiara: dopo essersi scervellato per arrivare al V postulato e aver quindi prodotto il maggior numero di teoremi senza farvi ricorso, Euclide, constatato il fallimento di tutti i suoi tentativi fu costretto alla fine ad inserirlo fra i postulati non potendone fare certamente a meno. É lecito pensare che egli abbia avuto seri dubbi sulla sua legittimità in quanto questa proposizione non ha il grado di evidenza che, secondo i canoni aristotelici, ogni principio deve possedere. Ricordiamo che il V postulato è la proposizione inversa di una proposizione dimostrabile e nella geometria classica non esiste forse alcun altro esempio di teorema la cui dimostrazione richieda ipotesi aggiuntive rispetto a quelle che sono necessarie per dimostrare il suo inverso. Tutta la matematica occidentale cercherà invano, per più di venti secoli, di ottenere quello che Euclide non era riuscito a trovare.

L'equivalenza del V postulato con il postulato dell'obliqua

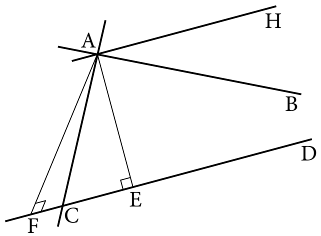
Veniamo ora alla storia vera e propria dei tentativi di dimostrazione del V postulato. Cominciamo col mostrare che il V postulato è equivalente ad un'altra proposizione apparentemente più semplice.

> **Postulato dell'obliqua.** Una perpendicolare e un'obliqua a una stessa retta si incontrano dalla parte in cui l'obliqua forma un angolo acuto con la retta.

É del tutto ovvio che dal V postulato segue il postulato dell'obliqua. Per dimostrare l'equivalenza basta allora far vedere che dal postulato dell'obliqua segue il V postulato.

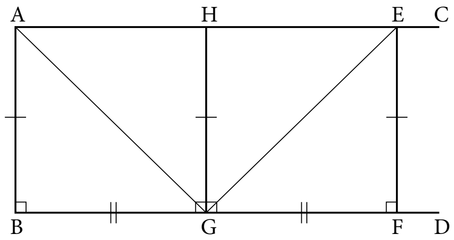
2. Possiamo dedurre l'esistenza della trasversale dall'unicità della parallela. Infatti, se una retta incontra una di due rette parallele incontra anche l'altra; se non lo facesse sarebbe parallela alla seconda e per un punto passerebbero due parallele. La dimostrazione dell'inverso ve la lascio per esercizio.

Siano date due rette AB e CD, che formano con la trasversale AC due angoli coniugati interni minori di 180°. Bisogna dimostrare che AB e CD si incontrano. Uno dei due angoli CAB e ACD deve essere acuto: lo sia ACD. Se da A abbassiamo la perpendicolare AE su CD, il punto E deve cadere sulla semiretta CD. Infatti, se cadesse in F a sinistra di C, l'angolo acuto ACD sarebbe esterno al triangolo rettangolo ACF e dovrebbe risultare maggiore dell'angolo retto AFC per il teorema dell'angolo esterno. Se la retta AB coincide con AE o è interna all'angolo CAE, essa incontra CD per l'assioma di Pasch. Supponiamo allora che AB sia esterna all'angolo CAE. Per il postulato dell'obliqua basta dimostrare che l'angolo EAB è acuto (in tal caso AB e ED si incontrano). Sia AH la retta per A tale che CAH + ACD = 180°. Evidentemente allora CAH > CAB, e quindi la semiretta AB è interna all'angolo CAH. AH e CD sono parallele per il teorema diretto delle parallele e quindi AH deve risultare perpendicolare ad AE, poiché in caso contrario, incontrerebbe CD per il postulato dell'obliqua. Ma se EAH è retto, EAB è acuto, e allora AB e CD si incontrano. Da questa equivalenza segue che per dimostrare il V postulato basta dimostrare il postulato dell'obliqua.



Tentativo di Posidonio (135–50 a.C.)

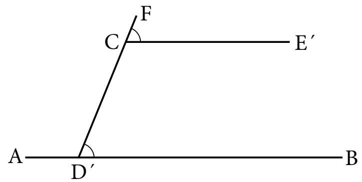
Siano date una perpendicolare BD e un'obliqua AC alla retta AB (con BAC acuto). Si vuole dimostrare che AC e BD si incontrano. Per assurdo si supponga che esse siano parallele. Da due punti G e F di BD, tali che BG = GF, si innalzino le perpendicolari su BD che incontrino AC in H e E.
Avendo supposto, per assurdo, che AC sia parallela a BD si ha che AB = HG = EF. A questo punto è facile dimostrare l'uguaglianza dei triangoli rettangoli ABG e GFE (hanno i cateti uguali) e successivamente quella di GHA e GHE. Ne segue che gli angoli in H sono retti e, quindi i due triangoli rettangoli GHA e ABG sono uguali avendo l'ipotenusa in comune e un cateto uguale. Ma allora risulta che l'angolo HAG è uguale a AGB e GAB è uguale a AGH, da cui, per somma, si ha BAH = HGB, che è assurdo, poiché BAH è acuto e HGB retto.



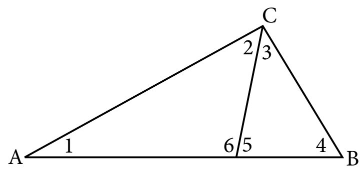
L'illecito è avvenuto quando, nel corso della dimostrazione, abbiamo accettato che se AC è parallela a BD allora AB è uguale a HG, cioè che due rette parallele siano equidistanti. Di fatto, con tale dimostrazione abbiamo soltanto dimostrato che, se due rette parallele sono equidistanti allora vale il V postulato. Dal momento che non è difficile dimostrare anche la proposizione inversa, quella che abbiamo ottenuto non è altro che un'altra proposizione equivalente al V postulato.

Si potrebbe aggirare il problema modificando la definizione di rette parallele. Invece che definire, come fa Euclide, rette parallele quelle che, prolungate indefinitamente, non si incontrino da nessuna delle due parti; si potrebbero definire parallele quelle rette che sono equidistanti. Ad un esame più attento però, si riconosce che il problema è solo spostato; infatti, a questo punto occorre essere certi che i concetti di retta e di equidistanza siano fra loro collegabili. In altre parole, bisogna essere certi

L'errore che abbiamo commesso è di un tipo ben noto nella logica classica ed è detto *ignoratio elenchi* (ignoranza della questione) che, liberamente, si può rendere con "fraintendimento di ciò che è stato dimostrato". Questo tipo di errore, conosciuto anche col termine *conclusione irrilevante*, consiste nel dimostrare qualcosa che non c'entra nulla con quanto richiesto. Infatti, cosa stabilisce effettivamente l'argomento basato sulla costruzione precedente? Esso mostra soltanto che se si traccia la parallela col metodo descritto (attraverso due perpendicolari) si ottiene una retta unica. Ma non esistono altri procedimenti per costruire parallele? Certo, è ben noto che esistono altre costruzioni che portano allo stesso scopo.
Ad esempio, invece di prendere il piede D della perpendicolare CD da C, possiamo prendere sulla retta AB un qualsiasi altro punto D′, congiungerlo con C mediante la retta D′F e sulla semiretta CF, vertice il punto C, costruire l'angolo FCE′ uguale all'angolo CD′B in modo tale che le semirette CE′ e D′B giacciano dalla stessa parte di FD′. In virtù del teorema diretto delle parallele (prop. XXVII) secondo il quale rette formanti con una trasversale angoli corrispondenti uguali sono parallele (teorema che si dimostra senza il V postulato) si può affermare che la retta CE′ è parallela a AB. Ma cosa ci garantisce che la retta CE della prima figura coincide con la retta CE′ della seconda? Affermare che differenti costruzioni conducono alla stessa retta significa accettare senza dimostrazione proprio ciò che si vuole dimostrare.



Esempio 2): dimostriamo che *la somma degli angoli di un triangolo è uguale a 180°* senza far ricorso al V postulato. Si divida un triangolo qualsiasi ABC in due triangoli per mezzo di un segmento tracciato dal vertice C e si denotino gli angoli mediante cifre come nella figura a lato. Sia x la somma degli angoli di un triangolo, supposta ignota; allora



$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x$$
$$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x$$

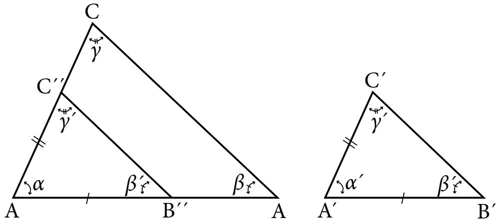
Sommando membro a membro queste due uguaglianze otteniamo:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x$$

Ma la somma $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ è la somma degli angoli del triangolo ABC, ossia anch'essa è x, e gli angoli 5 e 6, essendo adiacenti, hanno per somma 180°. Così per ricavare x, disponiamo della equazione $x + 180° = 2x$, da cui si ottiene immediatamente $x = 180°$.

Siamo talmente abituati ad accettare che la somma degli angoli di un triangolo sia costante per tutti i triangoli, indipendentemente dalla loro forma o dimensione, che la maggioranza di noi non ha nulla da eccepire contro l'enunciato "sia x la somma degli angoli di un triangolo". Ma in effetti quando ci proponiamo di dimostrare il teorema in questione, non sappiamo nulla circa la somma degli angoli di un triangolo, e non c'è alcun motivo plausibile che ci permetta di assumere che essa sia la stessa per tutti i triangoli. Ovviamente, potremmo accettare senza dimostrazione che questa somma sia uguale per tutti i triangoli e in questo caso gli argomenti avanzati proverebbero effettivamente che essa è pari a 180°. Ma ciò significherebbe in realtà aver introdotto un nuovo postulato al posto di quello di Euclide.

Dimostrazione. Se ABC e A′B′C′ sono i triangoli aventi $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, sia, ad esempio, AB > A′B′. Si prenda su AB il punto B′′, tale che AB′′ = A′B′. Sia C′′ il punto di AC tale che AC′′ = A′C′. Dall'uguaglianza dei triangoli B′′AC′′ e B′A′C′ (I criterio di congruenza), segue che AB′′C′′ = $\beta' = \beta$, per cui il punto C′′ deve essere necessariamente interno ad AC, poiché BC e B′′C′′ sono parallele per la proposizione 28 di Euclide. A questo punto basta osservare che nel quadrilatero BCC′′B′′ la somma degli angoli interni è 360° (poiché due angoli sono supplementari degli altri due) per concludere che vale il V postulato.



Al postulato di Wallis si possono fare le stesse obiezioni che abbiamo mosso alle altre proposizioni equivalenti al V postulato: non è affatto evidente come si comporta la forma di un triangolo quando i suoi lati aumentano indefinitamente. L'esistenza di figure simili ma di dimensioni arbitrarie potrebbe sembrare un buon compromesso da accettare al posto del V postulato, ma lo stesso Gauss, il *princeps mathematicorum*, così scriveva nel 1799 in una lettera a Wolfang Bolyai, suo ex compagno di Università, che gli chiedeva un'opinione su i suoi lavori riguardo al V postulato:

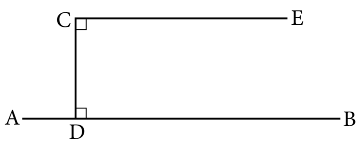
> Per quanto mi riguarda, ho compiuto alcuni progressi nei miei lavori su questo argomento. Comunque, la strada che ho scelto non porta affatto allo scopo desiderato; sembra piuttosto spingermi a dubitare della verità della stessa geometria. É vero che ho ottenuto molti risultati che per la maggior parte della gente sarebbero delle dimostrazioni, ma ai miei occhi essi non dimostrano quasi *nulla*. Per esempio, se potessi provare che esiste un triangolo la cui area è maggiore di ogni area assegnata, allora sarei in grado di dimostrare in modo assolutamente rigoroso tutta la geometria. Molti accetterebbero questo come un assioma, ma io no! Per quanto lontani fra loro si scelgano i vertici del triangolo è senza dubbio possibile che l'area sia sempre minore di un certo valore. Posseggo molti di questi teoremi, ma in nessuno trovo qualcosa di soddisfacente.

Il postulato di Gauss, cioè la possibilità di costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque altra area data è psicologicamente ancor più distante dal V postulato di quanto non fosse quello di Wallis, nondimeno il genio di Gauss riuscì da esso a dedurre il V postulato.

Altri tentativi

Consideriamo ora tre esempi di errate dimostrazioni del V postulato tratti dal Dubnov (si veda la bibliografia); del primo non conosco l'origine storica, gli altri due sono riconducibili ad Adrien Marie Legendre (1752–1833).

Esempio 1): dimostriamo il *postulato di Playfair*. Sia AB una retta e C un punto esterno ad essa; da C si abbassi la perpendicolare ad AB. Si tracci quindi per C la perpendicolare CE a questa perpendicolare. Questa seconda perpendicolare sarà parallela alla retta AB i virtù del teorema diretto delle parallele (prop. XXVII). Ma da un punto dato è possibile tracciare solo *una* perpendicolare a una retta data e da un punto su una retta é possibile innalzare solo *una* perpendicolare alla retta stessa; entrambi questi fatti possono essere dimostrati[3] senza usare il V postulato. Quindi la parallela CE è *unica*.

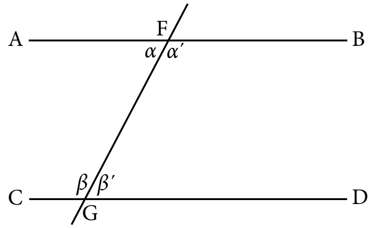


3. Se per assurdo AB e AC fossero entrambi perpendicolari alla retta BC il triangolo ABC avrebbe due angoli retti.

che il luogo dei punti di un piano equidistanti da una retta è ancora una retta. Si vede subito che questa ultima proposizione non è altro che un nuovo postulato. L'idea di dimostrare il V postulato modificando semplicemente la definizione di retta parallela nasconde in realtà un nuovo postulato implicito che, a guardar bene, non appare molto più evidente del V postulato stesso.

Tentativo di Tolomeo (100–178 d.C.)

Claudio Tolomeo, l'astronomo alessandrino famoso per il suo sistema planetario, tenta una dimostrazione con questo strano ragionamento. Siano AB, CD due parallele, FG una trasversale, α e β i due angoli interni a sinistra di FG, ed α' e β' i due angoli interni a destra. Non c'e dubbio che la somma $\alpha + \beta$ sarà maggiore, minore o uguale a due rette. *Supponiamo* allora che, se per una coppia di parallele si verifica, per esempio, il primo caso ($\alpha + \beta > 180°$), lo stesso debba succedere per ogni altra coppia. In questo caso, poiché le rette FB, GD sono parallele, come lo sono le rette FA, GC si ha che $\alpha + \beta > 180°$ e anche $\alpha' + \beta' > 180°$. Ma allora $\alpha + \beta + \alpha' + \beta'$ sarebbe maggiore di 360°, il che è evidentemente assurdo. Dunque non può essere che $\alpha + \beta > 180°$. Nello stesso modo si dimostra che non può essere $\alpha + \beta < 180°$, sarà quindi $\alpha + \beta = 180°$.



Tolomeo sta barando, egli assume infatti che se per una coppia di parallele si verifica, per esempio, il primo caso ($\alpha + \beta > 180°$), altrettanto avvenga per ogni altra coppia. Ma questo si può assumere solo nel caso che $\alpha + \beta$ sia uguale a 180° per evidenti ragioni di simmetria. Nel caso per esempio che $\alpha + \beta$ sia maggiore di 180° non possiamo affermare che qualsiasi coppia di parallele faccia lo stesso. La somma sarà maggiore di 180° per la coppia di coniugati da un lato e minore per l'altra.

Tentativi riferiti da Proclo (412–487 d.C.)

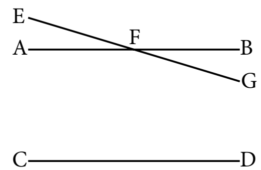
Proclo, dopo aver criticato il ragionamento di Tolomeo, prova a raggiungere lo stesso scopo in quest'altro modo. Assume come evidente la seguente proposizione:

> La distanza fra due punti situati su due rette che si tagliano può rendersi grande quanto si vuole prolungando sufficientemente le due rette.

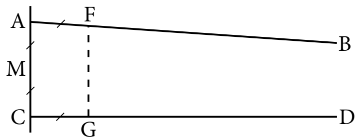
Da questa poi deduce il seguente lemma:

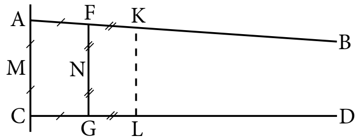
> Una retta che incontra una di due parallele incontra necessariamente anche l'altra.

La dimostrazione è la seguente: siano AB, CD due parallele ed EG una trasversale, incidente in F alla prima. La distanza di un punto variabile sul raggio FG dalla retta AB cresce oltre ogni limite quando il punto si allontana indefinitamente da F; e poiché *la distanza di due parallele è finita,* la retta EG dovrà necessariamente incontrare CD. Anche qui Proclo, come Posidonio, introduce l'ipotesi che la distanza di due parallele si mantenga finita, ipotesi che, come abbiamo visto, è una delle tante proposizioni equivalenti al V postulato.



Proclo riferisce un interessante argomentazione con la quale nell'antichità si pretendeva di dimostrare che due rette tagliate da una trasversale non si incontrano mai, neanche quando i coniugati interni sono minori di 180°. L'argomentazione fa (ab)uso del regresso all'infinito, lo stesso procedimento che aveva portato Zenone al paradosso di Achille e la tartaruga. Sulla retta AC innalziamo due semirette AB e CD tali che la somma degli angoli interni sia minore di 180°. Sia M il punto medio di AC, si prendano sulle semirette AB e CD i segmenti AF e CG uguali ad AM. Le due semirette evidentemente non possono incontrarsi fra i punti A, F e C, G perché in un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due. Congiungiamo poi i punti F e G e ripetiamo il procedimento tale e quale. Siccome l'operazione possiamo ripeterla quante volte vogliamo concludiamo che le semirette non si incontreranno mai. La fallacia dell'argomentazione risiede nel pregiudizio che una serie debba divergere in ogni caso dal momento che stiamo sommando infiniti addendi e la somma di una quantità infinita di elementi, anche se questi diventano via via più piccoli, deve *per forza* essere infinita. Come ogni studente dovrebbe sapere, la somma di una serie non si ottiene sommando i suoi infiniti addendi (cosa che non sappiamo fare) ma facendo il limite delle somme parziali e il risultato non è sempre infinito. Anche Proclo nota questo fatto e osserva che il suddetto procedimento non dimostra che il punto di incontro non esiste ma soltanto che, mediante tale procedura, non è possibile raggiungerlo.





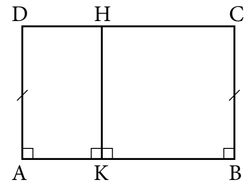
Tentativi nel Rinascimento

Dopo la scoperta del Commento di Proclo agli Elementi, stampato per la prima volta a Basilea nel 1533, rifiorisce l'interessa per la teoria delle parallele. Vedremo che tutti i tentativi fanno ricorso invariabilmente a qualche ipotesi aggiuntiva; i dimostratori sono ormai più o meno consapevoli che la dimostrazione assoluta, quella basata solo sui primi quattro postulati, sia molto improbabile da ottenere e si limitano a cercare qualche proposizione equivalente che goda di maggiore evidenza.

Cristoforo Clavio (1537–1612) dopo aver criticato la dimostrazione di Proclo, ne tenta una sua basandosi sulla proposizione di cui abbiamo già parlato a proposito del tentativo di Posidonio: "la linea equidistante da una retta è una retta" ch'egli cerca di giustificare in modo intuitivo.

Pietro Antonio Cataldi (1552–1626) pubblica nel 1603 un'opera esclusivamente dedicata al problema delle parallele in cui dimostra l'esistenza di rette equidistanti utilizzando la seguente ipotesi: "rette che non sono equidistanti convergono in una direzione e divergono nell'altra".

Vitale Giordano (1633–1711) rifacendosi al concetto di equidistanza formulato da Posidonio, vuole escludere la possibilità che le parallele, come definite originariamente da Euclide, possano avere il comportamento asintotico messo in evidenza da Proclo. A questo scopo utilizza sempre lo stesso metodo: definisce parallele due rette equidistanti e tenta di dimostrare che il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta. Ovviamente non ci riesce ma la dimostrazione contiene una interessante proposizione che in seguito darà luogo ad importanti sviluppi.
Sia ABCD un quadrilatero con gli angoli A, B retti e i lati AD, BC uguali; sia inoltre HK una perpendicolare calata da un punto H del segmento DC sulla base AB del quadrilatero. Giordano dimostra che:



a) gli angoli in D e in C sono uguali.
Tracciamo AC e BD; i triangoli rettangoli DAB e CBA sono uguali per il primo criterio di congruenza, per cui DB = AC. Ne segue che sono uguali, per il terzo criterio, i triangoli ADC e BDC. Sono quindi uguali gli angoli in C e in D del quadrilatero. Attenzione però non si può concludere che tali angoli siano retti.

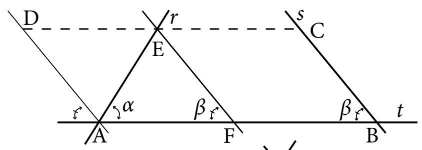
b) qualora il segmento HK sia uguale al segmento AD i due angoli in D e in C sono retti e CD è equidistante da AB.
Se AD = KH possiamo applicare il risultato precedente al quadrilatero AKHD e concludere che l'angolo in D è uguale all'angolo DHK. Siccome AD = BC ripetendo il procedimento sul quadrilatero KBCH concludiamo che l'angolo KHC è uguale all'angolo in C. Ma angoli adiacenti uguali sono per definizione retti.

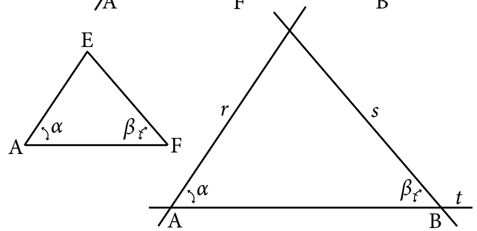
Con questo teorema la questione delle rette equidistanti viene ricondotta alla dimostrazione dell'esistenza di un punto H su DC, la cui distanza da AB sia uguale ai due segmenti AD, CB. In sostanza Giordano riesce ad individuare la minima ipotesi da cui derivare il V postulato e cioé l'esistenza di tre punti allineati equidistanti da una retta data.

John Wallis (1616–1703) abbandona il concetto di equidistanza rivelatosi poco fecondo e propone di sostituire il V postulato con il seguente:

Di ogni figura ne esiste una simile di grandezza arbitraria.

Può sembrare difficile come Wallis sia riuscito a dedurre il V postulato da questo, che sembra affermare qualcosa di molto differente; ma dal punto di vista logico il postulato di Wallis non è molto più lontano da V postulato di quanto lo sia il postulato di Posidonio (rette parallele sono equidistanti). Ciò che esso afferma per i triangoli, argomentava Wallis, è in fondo molto simile a quello che il terzo postulato afferma per le circonferenze, ossia l'esistenza di figure con la stessa forma ma dimensioni arbitrarie. Vediamo come da questa proposizione si ottiene il V postulato; Wallis applica questa proposizione solo al caso dei triangoli.





Siano r e s due rette che formino con la trasversale t due angoli α e β la cui somma sia minore di 180° e siano A e B i punti di intersezione. Vogliamo dimostrare che r e s si incontrano. Preso su s un punto C trasliamo con continuità s in direzione di A in modo che l'angolo β resti costante fino a che B coincida con A: il punto C si troverà nella posizione D a sinistra di r. Durante il movimento il punto C dovrà essersi trovato su r nella posizione E; sia F la posizione corrispondente di B. Il triangolo AFE ha due angoli uguali a α e β. Costruendo, per il postulato di Wallis, su AB il triangolo simile a AFE, il terzo vertice del triangolo è il punto cercato d'intersezione delle due rette.

Il risultato di Wallis può essere perfezionato nel modo seguente:

Se esistono due triangoli simili non uguali, allora vale il V postulato.