

Unità didattica su: *Resistenza interna dei generatori reali*

Introduzione

La nostra esperienza in campo didattico ci ha mostrato che i concetti chiave che formano il fondamento dei semplici circuiti in corrente continua sono spesso fonte di serie difficoltà per molti studenti, e che certe idee errate sono estremamente diffuse. Il risultato è che solo pochissimi studenti sviluppano la comprensione della fenomenologia di semplici circuiti elettrici.

Di solito, poi, la valutazione viene fatta attraverso manipolazioni numeriche della legge di Ohm mentre la capacità di risolvere problemi tradizionali ha solo una correlazione molto debole con la comprensione dei fenomeni fisici che accadono.

Noi pensiamo sia utile portare gli studenti a pensare con maggiore attenzione e più spesso agli aspetti qualitativi dei fenomeni. Non è saggio, infatti, a nostro parere imporre una formulazione completamente rigorosa fin dall'inizio. Spesso una formulazione dei risultati teorici, priva di supporto sperimentale, riduce la fisica ad un elenco di leggi e di concetti che lo studente memorizza (quando è diligente) senza comprenderne il significato.

Basandoci su questi principi abbiamo ideato una semplice unità didattica su un argomento specifico e limitato ma di grande interesse dal punto di vista didattico: *la differenza fra generatori ideali e reali*.

Vogliamo invitare i colleghi a riflettere su quanto sia utile dal punto di vista didattico presentare un argomento mediante un fatto inaspettato piuttosto che l'approccio tradizionale in base al quale le cose vanno in un certo modo perché lo dice una certa legge.

Nel nostro caso specifico abbiamo pensato ad un modo alternativo di introdurre il concetto di resistenza interna dei generatori mediante una semplice esperienza dalla cattedra seguita da un paio di esperimenti che non richiedono la disponibilità di un laboratorio attrezzato (il materiale necessario è economico e facilmente reperibile).

Esperienza dimostrativa dalla cattedra (1/2 h)

Si pone ai ragazzi questo semplice problema pratico. Supponiamo di avere necessità di una lampada portatile che faccia molta luce. Non l'abbiamo e siccome è sabato pomeriggio e i ferramenta sono chiusi prendiamo la nostra piccola torcia tascabile e sostituiamo la lampadina presente con una più potente (ovviamente di stessa tensione). Quello che otteniamo è che la torcia invece di fare più luce ne fa di meno.

Dal punto di vista pratico possono sorgere problemi per la reperibilità dei materiali. Consigliamo di utilizzare quattro mezze torce da 1.5 Volt in serie. Una lampadina da 6 Volt e 1 Watt e un'altra da 5 Watt (si trovano nei negozi per ricambi di ciclomotori).

Primo esperimento (2 h)

Ci si divide in gruppi e si misura la potenza dissipata su un set di resistenze note. Per farli esercitare su serie e parallelo di resistenze gli verranno fornite 4 resistenze da 0.47Ω e 4 resistenze da 10Ω . Con esse i ragazzi devono realizzare valori da 0.1Ω a 40Ω . Hanno a disposizione un tester universale e le quattro torce da 1.5 Volt usate per l'esperienza dalla cattedra. Devono compilare una tabella del genere, misurando la tensione e la corrente. (Si potrebbe far misurare una sola grandezza delle due ma preferiamo farle misurare entrambe in modo che si esercitino a prendere misure sia di corrente che di tensione).

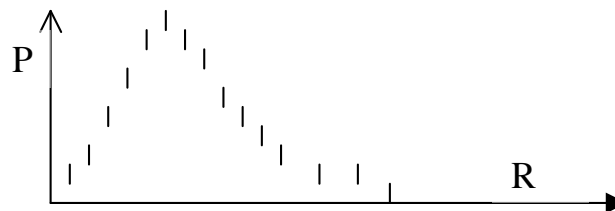
R [ohm]	V [Volt]	I [Ampere]
0.12 ±+0.01	0.15 ±+0.01	1.2 ±+0.1
0.25 ± 0.02	0.26 ±+0.02	1.2 ±+0.1
0.47 ± 0.02	0.53 ±+0.02	1.4 ±+0.1
.....
31.0 ± 0.5	0.12 ±+0.01	0.17 ±+0.01
40.5 ± 0.5	0.12 ±+0.01	0.13 ±+0.01

Dopo aver compilato la tabella devono calcolarsi la potenza facendo il prodotto tra tensione e corrente. L'errore sulla potenza sarà dato dalla somma degli errori percentuali su tensione e corrente.

R [ohm]	W [Watt]
0.12 ±+0.01	0.18 ±+0.03
0.25 ± 0.02	0.31 ±+0.05
0.47 ± 0.02	0.75 ±+0.10
.....
31.0 ± 0.5	0.020 ±+0.003
40.5 ± 0.5	0.016 ±+0.002

A questo punto si chiede ai ragazzi un grafico su carta millimetrata della potenza in funzione della resistenza.

Otterremo qualcosa del genere:



Esposizione dei risultati (1 h)

A turno un rappresentante di ciascun gruppo sarà invitato ad esporre alla classe i risultati ottenuti e questo darà l'occasione al docente di formulare un primo giudizio sul lavoro del gruppo.

Discussione guidata per arrivare all'ipotesi della resistenza interna (1 h)

Questa è la parte più delicata del lavoro. La discussione dovrà essere guidata dal docente e avrà per tema: "Come possiamo spiegare i dati sperimentali ottenuti?" Se facciamo una ipotesi come possiamo poi verificarla? (o meglio tentare di falsificarla). In questa fase è importante, a nostro parere, mostrare non tanto la spiegazione del nostro caso particolare (in fondo abbastanza banale) quanto il metodo con quale procediamo. Le ipotesi che possiamo fare per spiegare il fenomeno possono essere le più fantasiose, l'importante è che, accettata una ipotesi, si cerchi di falsificarla in ogni modo. Se essa resiste allora è probabile che sia quella corretta.

L'ipotesi corretta, ovviamente, è che all'interno della pila tutto va come se ci fosse una resistenza. Questa ipotesi è avvalorata dal fatto che quando mettiamo resistenze piccole la corrente non va all'infinito come prevede la legge di Ohm ma tende ad un valore costante.

Dalla corrente di corto circuito della pila possiamo ricavarci subito il valore dell'ipotetica resistenza interna.

$$R_{int} = \frac{V}{I_{max}}$$

Nel nostro caso otterremo una resistenza interna complessiva di circa 5 Ω. Invitiamo i ragazzi inoltre ad osservare che abbiamo ottenuto il massimo trasferimento di potenza proprio in corrispondenza di valori della resistenza prossimi alla resistenza interna.

Secondo esperimento: la pila con le monete (1 h)

A questo punto facciamo costruire ai ragazzi una rudimentale pila e invitiamoli a misurare la tensione e la corrente massima che la pila fornisce. Sono necessarie una decina di monete da 100 o da 50 lire (quelle di acciaio inox) e una decina da 200 lire (di altra lega contenente rame). Si costruisce una pila di monete sovrapposte interponendo fra quella da 100 e quella da 200 un pezzettino di tovagliolo di carta imbevuto di aceto. Poniamo una decina o più di elementi in serie. Si ottiene in questo modo un generatore di circa un Volt che eroga una corrente massima ridicola (circa 50 mA) non sufficiente ad accendere nessuna lampadina.

Ad ogni gruppo verrà dato un questionario con una serie di domande del tipo:

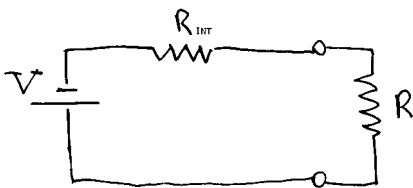
- misurare tensione e corrente massima di un singolo elemento.
- misurare tensione e corrente massima di una serie di n elementi in serie e verificare che la resistenza interna è n volte la resistenza interna del singolo elemento.
- In base all'esperimento precedente ipotizzare un andamento della potenza in funzione della resistenza per questa pila.
- dire se è possibile accendere una lampadina con questa pila.

Alla fine dell'esperienza il docente potrà fornire un LED per mostrare che la pila funziona e riesce ad accendere qualcosa.

Un po' di teoria (1 h)

A questo punto è il caso di fare un po' di conti e trovare per via analitica la potenza in funzione della resistenza applicata. Questa è una tradizionale lezione frontale espositiva e se il primo esperimento è stato realizzato correttamente dovremmo ritrovare la curva ottenuta precedentemente. Vogliamo ribadire ancora una volta che questa parte non ha valore di "spiegazione" del fenomeno, ma solo di verifica. Quello che vogliamo verificare è che, se l'ipotesi della resistenza interna è corretta, allora, risolvendo il circuito, dovremmo ritrovare il grafico sperimentale. La trattazione matematica, presuppone la conoscenza delle nozioni fondamentali per tracciare un grafico.

Il circuito da risolvere è il seguente:



$$I = \frac{V}{R_{int} + R}$$

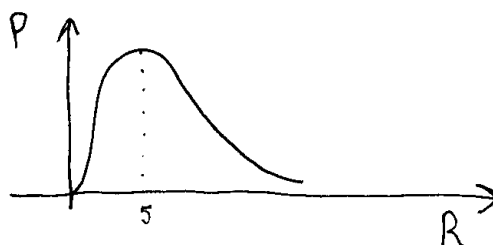
$$P = I^2 R = V^2 \frac{R}{(R_{int} + R)^2}$$

Nel caso particolare del primo esperimento abbiamo: ($V = 6$ Volt, $R_{int} = 5\Omega$)

$$P(x) = 36 \frac{x}{(5+x)^2}$$

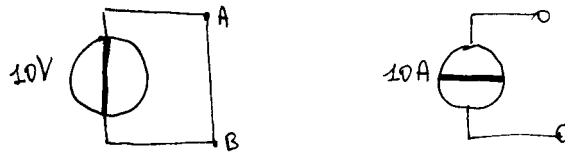
Lo studio di questa funzione è semplice. Si osserva che essa in zero vale zero e all'infinito tende a zero. Annulliamo la derivata per trovare i punti a tangente orizzontale. $P'(x) = 0 \Rightarrow 36 \frac{(x+5)^2 - 2x(5+x)}{(x+5)^4} = 0$ cioè $(x+5)(-x+5) = 0$.

Abbiamo un punto a tangente orizzontale per $x=5$ (x negativo non ha senso fisico). La funzione è continua, $x=5$ può essere solo un massimo. Abbiamo ritrovato la curva sperimentale.



Quesiti sui generatori e sulla resistenza interna per eventuali test di valutazione o approfondimenti in classe.

- Perché sono assurdi due generatori ideali uno di tensione e l'altro di corrente collegati in questo modo:



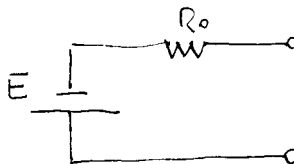
La risposta alla prima domanda che si trova nei manuali è che non si possono mettere due generatori di tensione in parallelo e in questo caso abbiamo un generatore di tensione in parallelo ad un generatore di tensione nullo (la tensione ai capi di un conduttore).

Noi preferiamo porre la questione nel seguente modo: chiediamo ai nostri studenti quale sia la tensione fra i punti A e B immaginando di togliere il filo che cortocircuita il generatore: la tensione è quella del generatore perché esso per definizione impone la tensione V ai suoi morsetti qualsiasi sia il carico che mettiamo. Immaginiamo poi di togliere il generatore: la tensione è zero perché misurata ai capi di un conduttore. È bene aspettare che si creino nella classe due gruppi di parere opposto (spesso se ne crea anche un terzo che dice che la tensione è la metà) e farli discutere fra loro: è importante in questa fase saper evidenziare quegli spunti giusti (sperando che ce ne siano) che si trovano in qualunque intervento, anche il più "stravagante", affinché tutti possano intervenire senza la paura di dire "stupidaggini".

Questo esempio inoltre fa vedere come la realtà sia sempre meno ideale di come viene descritta sui testi. Oltre a non esistere generatori ideali non esistono neanche conduttori ideali. In pratica se cortocircuitiamo un generatore quasi ideale (cioè con resistenza interna trascurabile) con un normale filo di rame è come se avessimo costruito un circuito con una resistenza di circa un centesimo di Ohm. Tutto sta vedere se il valore della resistenza interna è ancora "trascurabile".

Il secondo circuito è un generatore di corrente lasciato aperto, in linea di principio dovrebbe far salire la tensione fino a far scoccare la scintilla fra i morsetti (l'aria ha una rigidità dielettrica di circa 30.000 V/cm).

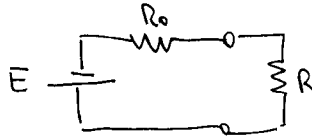
Quanto vale la tensione V nel seguente circuito.



Gli studenti saranno tentati di dire che la tensione sarà di meno visto che c'è una resistenza in serie. Riteniamo sia didatticamente più utile presentare due circuiti con tensione non generica mettendo due resistenze una per esempio da 1 Ω e l'altra da 1 M Ω e chiedere di risolvere il circuito con le leggi di Ohm.



Le leggi di Ohm sono inapplicabili perché abbiamo il prodotto di una resistenza infinita per una corrente nulla. Una tipica forma indeterminata che può dare qualsiasi valore (possiamo fare un riferimento con le forme indeterminate dei limiti). Il circuito si risolve immaginando di applicare una resistenza finita di valore R , calcolare la tensione su questa resistenza e poi mandare R ad infinito e vedere cosa succede. Otteniamo:



$$V_R = R \cdot I = E \frac{R}{R_0 + R} \quad \text{facendo il limite} \quad V = \lim_{R \rightarrow \infty} V_R = E \frac{R}{R_0 + R} = E \quad \text{indipendente da } R_0$$

È evidente l'analogia con l'esperimento sulla resistenza interna. Possiamo avere pile che a circuito aperto danno tensioni anche molto elevate (volendo aumentare la tensione basta metterle in serie) ma che in pratica non servono a nulla perché la corrente prelevabile è troppo modesta.

Quesiti sulla corrente elettrica di carattere pratico didatticamente utili.

Vogliamo presentare una serie di quesiti da porre in classe come argomento di discussione che possono risultare utili all'insegnante per esemplificare alcuni aspetti pratici della corrente elettrica. Sono pensati con l'intento di incuriosire i ragazzi e sono tutti molto semplici e forse anche banali. Abbiamo notato, per esperienza diretta (chi di noi ha insegnato questi argomenti) che questo tipo di approccio è di straordinario valore didattico.

- Perché gli elettrodotti sono ad altissima tensione?

Questo è un quesito molto utile per far capire che la legge di Ohm non si applica a tutti i casi in cui una sorgente di differenza di potenziale genera una corrente elettrica (stiamo parlando anche di carichi non puramente resistivi, come un motore). Naturalmente, spiegare semplicemente questo agli studenti non conduce da nessuna parte. Una maniera efficace per condurre gli studenti ad affrontare questo problema è quello di analizzare il perché la trasmissione di energia ad alta tensione è molto più efficiente di quella a bassa tensione.

Si potrebbe impostare la discussione nel seguente modo. Prima di tutto è chiaro che, benchè la trasmissione dell'energia elettrica avviene in corrente alternata, non si fa un errore serio nel trattarla come un problema in corrente continua.

Supponiamo perciò di voler fornire ad un certo carico (la rete elettrica del nostro condominio pensata come una unica resistenza) un certa potenza (diciamo 50 KW) con una tensione V . Indichiamo la resistenza delle linee elettriche dalla sorgente distante (per esempio Montalto di C.) con la lettera R . Dovrebbe essere chiarito agli studenti che la natura del carico non è conosciuta e che la tensione deve essere scelta sulla base di una ricerca sulle condizioni più favorevoli.

Il punto cruciale del problema è che la resistenza del carico è irrilevante anche se nota. La corrente che scorre attraverso la linea è determinata dalla richiesta di avere una certa potenza: $I = \frac{P}{V}$ senza che abbia nessuna importanza di che tipo

sia il carico. Questo è ciò che bisognerebbe far vedere agli studenti i quali di solito, per abitudine, vogliono applicare ad ogni costo la legge di Ohm.

Dal momento che la corrente viene fissata dalla richiesta sulla potenza, la perdita di calore per effetto Joule nelle linea vale: $Perdita_{resistiva} = I^2 R$.

L'efficienza η è data da: $\eta = \frac{P}{P + I^2 R}$ sostituendo $I = \frac{P}{V}$ otteniamo: $\eta = \frac{P}{P + \frac{P^2 R}{V^2}} = \frac{1}{1 + \frac{PR}{V^2}}$ che mostra che

l'efficienza aumenta in maniera rilevante all'aumentare di V. Gli studenti dovrebbero essere invitati ad analizzare la formula facendo un confronto numerico fra due casi (per esempio con $V=220V$ e $100.000V$).

Proviamo a farlo noi. La potenza l'abbiamo già fissata in 50 KW, ci serve di calcolare la resistenza della linea.

Supponiamo la centrale a 25 Km e i cavi di sezione 5 cm^2 viene una $R = \rho \frac{l}{S} = 0.017 \frac{5 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^2} = 1.7 \Omega$.

Quindi: $\eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 1.7}{220^2}} = 36\%$ $\eta_2 = \frac{1}{1 + \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 1.7}{(10^5)^2}} = 99.9991\%$

Indipendentemente dal fatto che questo problema venga affrontato in modo algebrico o aritmetico è importante condurre gli studenti attraverso il ragionamento in maniera socratica, facendo in modo che completino e spieghino tutti i passaggi e interpretino i risultati. Metterli di fronte al risultato già dimostrato e richiedere loro di fare qualche analisi algebrica o qualche sostituzione numerica non fa interiorizzare la comprensione degli aspetti cruciali del ragionamento.

- *Supponiamo di fare un viaggio negli Stati Uniti e di portarci il Phon da casa (a chi serve). Se il Phon ha una potenza di 700 Watt che potenza avremo mettendolo nella presa americana da 110V?*

Questa domandina è un altro ottimo spunto per mettere in evidenza che tensione e corrente non sono direttamente proporzionali ma che la potenza va col quadrato della tensione. I ragazzi infatti saranno tentati di dire al volo che la potenza si dimezza.

- *Perché sotto i 30 Volt la corrente non si sente? L'elettrauto non è preoccupato di prendersi la scossa.*

Dipende sempre dalla non linearità fra tensione e potenza. La resistenza umana è alta (circa $100K\Omega$ a pelle asciutta) per cui $V^2/10^5$ a 12V da una potenza di circa 10^{-3} Watt mentre a 220V abbiamo ben 0.5 W. Se prendiamo corrente da una mano all'altra l'energia trasferita passando per il cuore può mandarlo in fibrillazione. Si muore per arresto cardiaco non per le ustioni.

- *Visto che è sicura perché in casa non si usa tensione a 12 Volt? (nel camper tutto funziona a 12 Volt anche il frigorifero).*

Si può fare, solo che bisognerebbe usare cavi di sezione enorme. Questa domanda è un ottimo spunto per parlare della seconda legge di Ohm.

- Un automobilista, avendo la batteria scarica e non disponendo dei cavi regolari, prova ad usare un normale filo da lampadina. Cosa succede?

È un semplice esercizio sulla II legge di Ohm. Il filo da lampadina ha una resistenza troppo alta, si scalda e limita la corrente al motorino che non gira. È interessante ricollegarsi al problema della resistenza interna. La batteria della macchina ha una resistenza interna molto bassa perché deve essere in grado di fornire la potenza necessaria a far girare il motorino di avviamento che consuma più di mezzo KW. (a pensarci bene la batteria serve soltanto ad avviare il motore perché una volta partito la corrente necessaria ai vari utilizzatori è fornita dal generatore). La resistenza interna si calcola dal valore della corrente massima scritto sull'etichetta (circa 200 A). Il calcolo è un buon pretesto per ricordare che quella che l'elettrauto chiama una batteria da 40 Ampere è in realtà una batteria da 40 Amperora cioè una batteria in grado di erogare 40 Ampere per un'ora (oppure 1 Ampere per 40 ore).

- Perché in casa la tensione è alternata e in macchina è continua (anche se è prodotta alternata)?

Quella alternata si trasforma facilmente senza troppi sprechi (molte apparecchiature richiedono basse tensioni di alimentazione, per esempio il computer), quella continua può essere accumulata.

- È vero che il salvavita evita di prendere la scossa in ogni caso?

Falsissimo. L'interruttore differenziale (salvavita) funziona in modo da aprirsi se si verifica una differenza di più di 30 mA fra la corrente che entra e quella che esce, cioè se c'è una dispersione verso terra superiore alla soglia di pericolosità per l'uomo che è proprio fissata in 30 mA. L'interruttore si apre quindi solo se tocchiamo un solo filo e siamo contemporaneamente in contatto con un conduttore connesso a terra (caso abbastanza raro). Nel caso li tocchiamo tutti e due e non siamo connessi a terra (perché abbiamo le scarpe da ginnastica o non stiamo toccando il rubinetto) non esiste salvavita che possa salvarci.

- Misurando il tempo che ci mette la rotella del contatore della luce a fare un giro vogliamo ricavare una formula che fornisca la potenza. Leggiamo sul contatore che 600 giri corrispondono ad un chilovattora.

È un esercizio simpatico che può essere utile per sapere se il contatore sta per scattare (cioè se stiamo prelevando più dei 3 KW permessi). Se i ragazzi non ci riescono per via analitica possiamo invitarli a ricavare la legge in modo empirico, per esempio misurando i periodi di rotazione in corrispondenza di potenze note (si accedono uno dopo l'altro gli elettrodomestici). Si costruisce un grafico da cui si può ricavare l'informazione desiderata per interpolazione.

Per ottenere la formula ragioniamo così: se tengo acceso qualcosa che consuma 1000 W il contatore farà 600 giri/ora cioè la rotella avrà una frequenza di 600/3600 Hertz che corrisponde ad un periodo T di 6 sec. Se per 1000 W impiega un periodo di 6 sec per 2000 W impiegherà un periodo di 3 sec per cui la formula cercata è semplicemente:

$P(T) = \frac{6000}{T}$. Quando la rotella impiega meno di 2 secondi per fare un giro è il caso che spegniamo lo scaldabagno.