Dalla definizione segue che il centro dell'inversione non ha alcuna immagine mentre per tutti gli altri punti P diversi da O la corrispondenza è biunivoca e involutoria cioè se P′ è l'inverso di P allora P è l'inverso di P′. Inoltre è facile mostrare che:

1. se P appartiene alla circonferenza γ, P′ coincide con P;
2. P è interno a γ se e solo se P′ è esterno (e viceversa);
3. più P è vicino a O tanto più P′ ne è distante (e viceversa).

Concludendo, l'inversione circolare lascia fissi i punti della circonferenza e ne scambia l'interno con l'esterno; da ciò segue, in particolare, che la trasformata di una retta non passante per il centro di inversione non può essere una retta, come si vede nel seguente:

Esercizio 1.9 creato lo strumento con geogebra possiamo vedere in dettaglio che l'inversione circolare rispetto ad un cerchio γ di centro O trasforma:

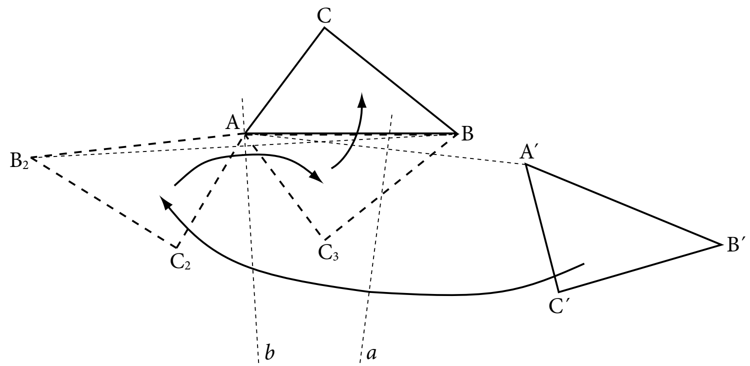
1. una retta passante per O in se stessa,
2. una retta non passante per O in un cerchio passante per O;
3. un cerchio δ passante per O in una retta non passante per O, parallela alla tangente a δ in O; se δ e γ si intersecano, l'inverso di δ è la retta passante per i due punti di intersezione;
4. un cerchio non passante per O in un cerchio non passante per O.

Riferimenti bibliografici

I. D'Ignazio - E. Suppa, *Il problema geometrico*, interlinea editrice, 2001
W. Maraschini - M. Palma, *Manuale dei numeri e delle figure*, Editori Riuniti, 1985

Marco Savarese

Trasformazioni geometriche con Geogebra



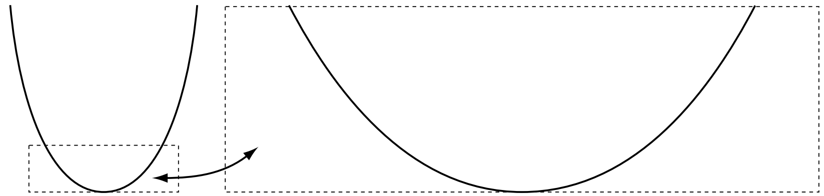
PREMESSA

Non sono uso alle premesse, nelle precedenti dispense non ve ne sono quindi sarò breve: da un po' di tempo sono sempre più mal disposto verso quella specie di rullo compressore che è l'algebra, ho quindi deciso di dire qualcosa sulle trasformazioni da un puro punto di vista geometrico. Come dice Felix Klein "una geometria analitica fatta solo di calcoli, che abolisce le figure, non può essere considerata vera geometria."

questa dispensa è disponibile su: www.savarese.altervista.org

Ottobre 2010 - Rev. 12/10

qualunque altra coppia di elementi F′ e *d*′. In altre parole tutte le parabole hanno la stessa forma e sostanzialmente esiste *una sola* parabola; il fatto che le vediamo più o meno concave dipende solo dal fattore di scala, determinato dalla distanza tra fuoco e direttrice.



Esercizio 1.8 dati i punti A, A′ e B, B′ si trovi una similitudine che mandi A in A′ e B in B′.
Con una traslazione si porta A in A′, poi con una rotazione si porta B_1 sulla semiretta A′B′, infine con una omotetia si porta B_2 a coincidere con B′.

L'inversione circolare

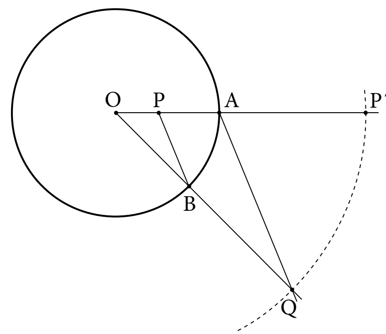
Le trasformazioni geometriche studiate finora sono collineazioni, cioè trasformano rette in rette. Vediamo ora un nuovo tipo di trasformazione, che può essere utile nei problemi di costruzione con riga e compasso; essa, pur non essendo un'isometria, lascia invariate le ampiezze degli angoli e trasforma le rette in rette o circonferenze.

Definizione 1.10 *Inversione circolare*
Sia dato un cerchio γ di centro O e raggio k, una inversione circolare è una trasformazione geometrica che ad ogni punto P diverso da O fa corrispondere il punto P′ della semiretta di origine O passante per P, tale che:

$$OP \cdot OP' = k^2$$

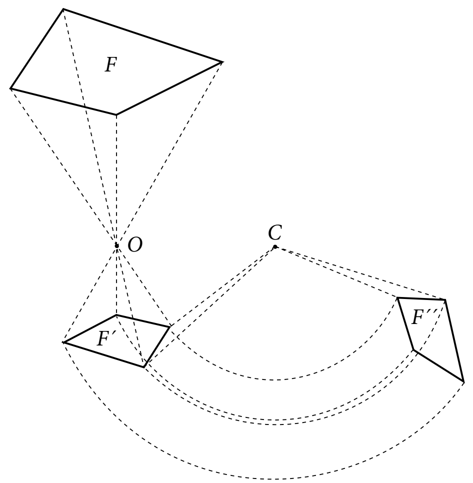
Il punto P′ è detto l'*inverso* di P rispetto a γ, γ si dice *cerchio di inversione*, O e k sono rispettivamente il centro (*polo*) e il *raggio dell'inversione*. Una inversione circolare è univocamente determinata quando siano dati il centro O e il raggio k del cerchio e viene indicata con la notazione $I(O,k)$. Supponiamo allora di avere il punto O e il raggio k, dato un altro punto P qualsiasi interno al cerchio come si trova il suo trasformato P′?

Costruzione 1.7 si prenda un punto B qualsiasi sulla circonferenza e si tracci la semiretta OB; si unisca P con B; sia A il punto di intersezione della semiretta OP con la circonferenza; si tracci la parallela a PB passante per A; sia Q il punto di intersezione di questa parallela con la semiretta OB; P′ è l'intersezione fra la circonferenza concentrica di raggio OQ e la semiretta OP.
dim. il triangolo OPB è simile al triangolo OAQ quindi OP/OA = OB/OQ, essendo OA = OB = k si ha: $OP \cdot OQ = k^2$.



uno qualunque di questi punti da altri due resta costante, per esempio si ha: LN/NM =BM/CM (basta far vedere che i triangoli LMB e MNC sono simili); allora se durante il movimento teniamo fermo il punto M, i due punti L e N descrivono due linee γ e γ' omotetiche il cui centro è proprio M.

La similitudine
Una omotetia trasforma una figura in un'altra più grande o più piccola secondo che il valore assoluto di k sia maggiore o minore di 1. Supponiamo ora che due figure, F e F' si corrispondano attraverso una omotetia, applichiamo ad F' un'isometria, per esempio una rotazione, in modo da ottenere la figura F''.



La corrispondenza che si viene a stabilire tra i punti F e F'' si chiama similitudine e le figure che si corrispondono si dicono simili. Più precisamente:

Definizione 1.9 *Similitudine*
Una similitudine è il prodotto di una omotetia e di una isometria.

La similitudine conserva i rapporti fra distanze, cioè esiste una costante positiva k tale che, per ogni coppia di punti P e Q risulta $P'Q'/PQ = k$; questa costante si chiama rapporto di similitudine. Si noti che una similitudine non è una dilatazione perché non trasforma rette in rette parallele. É facile mostrare (con geogebra) che:

1. in una similitudine ad una retta corrisponde una retta;
2. ad una circonferenza corrisponde una circonferenza;
3. il prodotto di due similitudini, di rapporti h e k, è una similitudine di rapporto hk;
4. una similitudine conserva gli angoli.

Un risultato a prima vista paradossale è che due parabole sono sempre simili fra loro. Infatti una parabola è definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto (il fuoco F) e da una retta (la direttrice d). Questa coppia di elementi può essere trasformata mediante una similitudine in una

1. Trasformazioni geometriche con geogebra

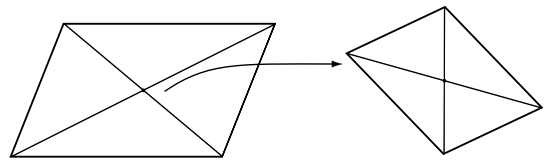
I fenomeni spaziali contemplati dalla geometria sono i più elementari fenomeni fisici che conosciamo. R. Von Mises

Iniziamo, senza tanti complimenti, con questa definizione:

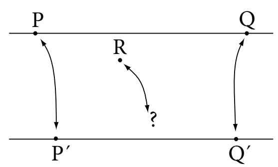
Definizione 1.1 *Affinità*
Una affinità[1] è una trasformazione geometrica che fa corrispondere a rette parallele rette parallele.

Proposizione 1.1 Le affinità conservano il punto medio di un segmento.

dim. Consideriamo le diagonali di un parallelogramma, sappiamo che si intersecano nei loro punti medi. Dal momento che le affinità conservano il parallelismo i parallelogrammi si trasformano in altri parallelogrammi. Il segmento che rappresenta una diagonale si trasformerà in un altro segmento di lunghezza e orientamento differenti ma il cui punto medio è il trasformato del punto medio della diagonale di partenza.



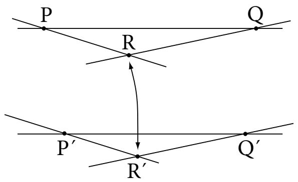
Definizione 1.2 *Dilatazione*
Una dilatazione è una affinità che fa corrispondere ad una retta un'altra retta ad essa parallela.



Una dilatazione è univocamente determinata quando siano dati due punti P, Q e i loro trasformati P′ e Q′ i quali devono giacere su una parallela a PQ (per definizione). Supponiamo allora di avere questi quattro punti P, Q, P′ e Q′, dato un altro punto R qualsiasi come si trova il suo trasformato R′?

1. Per gli amanti del rigore...una trasformazione geometrica piana è una corrispondenza del piano in sé, biunivoca e bicontinua. Biunivoca è chiaro, bicontinua significa che ad insiemi aperti corrispondono insiemi aperti e viceversa. É possibile che una trasformazione faccia corrispondere ad un punto se stesso; in questo caso si dice che il punto è lasciato fisso (o unito) dalla trasformazione.
Una affinità è una particolare trasformazione geometrica piana con le seguenti caratteristiche: 1. è una collineazione (ovvero fa corrispondere ad una retta un'altra retta cioè mantiene l'allineamento tra punti); 2. fa corrispondere punti propri a punti propri e punti impropri a punti impropri (cioè la trasformazione mantiene il parallelismo fra rette); 3. è costante il rapporto tra lunghezze lungo la stessa direzione (cioè non si mantiene un rapporto costante fra lunghezze, come nelle similitudini, ma si mantiene un rapporto costante tra lunghezze di segmenti aventi la stessa direzione).

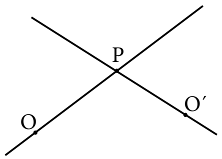
Costruzione 1.1 Si tracci la retta PR; il trasformato di R deve trovarsi sulla parallela a PR passante per P′; si tracci poi QR, per lo stesso motivo il trasformato di R si troverà sulla parallela a QR passante per Q′; l'intersezione delle due parallele è il punto cercato.
Fatta la costruzione con geogebra creiamo lo strumento (quello che in cabri si chiama macro) per ottenere il trasformato di un punto in una dilatazione: l'oggetto finale è R′, gli oggetti iniziali sono i quattro punti P, Q, P′, Q′ e il punto R (attenzione all'ordine).



Osservazione 1.1 Se il punto si trova su PQ la costruzione 1.1 non funziona. Ragioniamo così: supponiamo di aver già ottenuto il trasformato R′ di un altro punto R qualsiasi non su PQ; sia S il punto su PQ di cui cerco il trasformato S′; traccio la retta SR; siccome la retta SR si trasformerà in una retta parallela ed ho già ricavato R′, traccio la parallela a SR passante per R′; l'intersezione di questa parallela con la retta P′Q′ è il trasformato di S′ di S.

Esercizio 1.1 Con geogebra tracciamo un poligono qualsiasi e vediamo come si trasforma. Si noterà che le dilatazioni conservano la forma e le direzioni.

Proposizione 1.2 Una dilatazione che abbia più di un punto unito è l'identità.

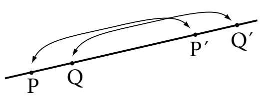


dim. Siano O e O′ due punti uniti; consideriamo un punto P qualsiasi, il suo trasformato dovrà giacere sulla retta OP (tutte le rette passanti per O sono unite); ma per lo stesso motivo P dovrà trasformarsi in un punto che giace sulla retta PO′. Concludiamo che P si trasforma in se stesso.

Osservazione 1.2 Le affinità in generale possono avere più punti uniti.

Definizione 1.3 *Traslazione*
Una traslazione è una dilatazione senza punti uniti.

Una traslazione è univocamente determinata quando sia dato un punto P e il suo trasformato P′. Siccome una traslazione è una particolare dilatazione la retta PP′ si trasformerà in se stessa; la retta nel suo complesso è unita, ad ogni punto corrisponderà un altro punto sulla retta. Supponiamo allora di avere una traslazione (cioè un punto P e il suo trasformato P′), dato un altro punto Q qualsiasi come si trova il suo trasformato Q′?

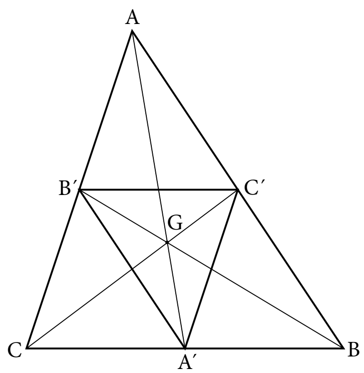


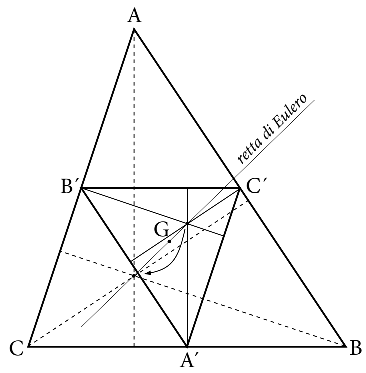
Costruzione 1.2 Q′ deve giacere sulla parallela a PP′ passante per Q; si unisca P con Q e si tracci la parallela a PQ passante per P′; poi si tracci la parallela a PP′ passante per Q; l'intersezione delle due parallele è il punto cercato (la costruzione è analoga alla 1.1).

Esercizio 1.2 creato con geogebra lo strumento per ottenere il trasformato in una traslazione, possiamo comporre insieme due traslazioni e mostrare che si ottiene sempre un'altra traslazione.

Proposizione 1.5 L'ortocentro, il baricentro e il circocentro di un triangolo sono allineati.

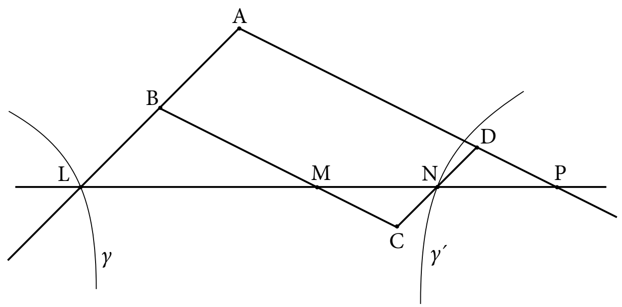
dim. sia ABC un triangolo qualsiasi, consideriamo il triangolo A′B′C′ che ha per vertici i punti medi dei lati (detto triangolo mediano). Come prima cosa mostriamo che i baricentri dei due triangoli coincidono; per far ciò basta osservare che AB′A′C′ è un parallelogramma e quindi le diagonali si bisecano. Ripetendo il ragionamento per i parallelogrammi BA′B′C′ e A′CB′C′ si arriva facilmente alla tesi. Notiamo poi che le altezze del triangolo mediano sono gli assi del triangolo di partenza





e quindi l'ortocentro di A′B C′ coincide col circocentro di ABC. A questo punto applichiamo una omotetia di centro G (il baricentro in comune dei due triangoli) e rapporto −½. il vertice A andrà dall'altra parte rispetto a G ad una distanza pari alla metà della lunghezza AG cioè proprio in A′. L'omotetia ha trasformato il triangolo ABC nel suo triangolo mediano. Ma le omotetie conservano i punti notevoli del triangolo quindi l'ortocentro di ABC si trasformerà nell'ortocentro di A′B′C′ che abbiamo visto coincidere col circocentro di ABC. Essendo G il punto unito dell'omotetia il trasformato di qualsiasi punto P dovrà giacere sulla retta GP e quindi la dimostrazione è conclusa.

Esercizio 1.7 *il pantografo.*
Il pantografo è costituito da un parallelogramma articolato in grado di generare meccanicamente linee omotetiche. Sia ABCD il parallelogramma, prendiamo sopra i lati AB, BC, CD, DA o sui loro prolungamenti, nell'ordine, quattro punti L, M, N, P allineati e facciamo in modo che essi restino fissi sui lati mentre il parallelogramma si deforma. É facile mostrare che il rapporto delle distanze di



con *a*); questa scelta ci garantisce che A_2 (il trasformato di A_1 in questa simmetria) vada a coincidere con A. Ora, come seconda simmetria scegliamo quella che ha per asse la bisettrice *b* dell'angolo B_2AB; questa scelta ci garantisce che B_2 vada a coincidere con B. A questo punto appare evidente che C_3 è il simmetrico di C rispetto alla retta AB e quindi un'ulteriore simmetria avente per asse questa retta porterà i due triangoli a coincidere.

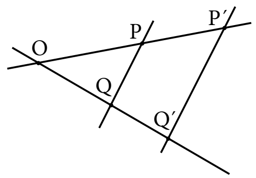
L'omotetia

Torniamo ora alle dilatazioni; avevamo visto nella proposizione 1.2 che queste non possono avere più di un punto unito. Se non ne hanno nessuno allora prendono il nome di traslazioni le quali, oltre ad essere particolari dilatazioni, sono anche isometrie cioè conservano le distanze. Anche per le isometrie è facile mostrare che se vi fossero tre punti uniti non allineati allora tutti i punti sarebbero uniti e la trasformazione si ridurrebbe all'identità. Abbiamo visto poi che una isometria con un punto unito si chiama rotazione, vediamo ora come è definita una dilatazione con la stessa proprietà:

Definizione 1.8 *Omotetia*
Una omotetia è una dilatazione con un punto unito.

Sia O il suo unico punto unito e P un punto qualsiasi; il trasformato di P dovrà giacere sulla retta OP. Quindi una omotetia è univocamente determinata quando sono dati tre punti allineati di cui uno è quello unito. Supponiamo allora di avere questi tre punti O, P, e P′, dato un altro punto Q qualsiasi, come si trova il suo trasformato Q′?

Costruzione 1.6 Q′ giace su OQ; si congiunga P con Q, Q′ è l'intersezione della parallela a PQ passante per P′ con la retta OQ (ad una retta deve corrispondere una retta parallela). Notiamo che una omotetia è individuata da un centro O e dal rapporto k = OP′/OP detto anche *caratteristica*.



Esercizio 1.6 creato lo strumento per ottenere il trasformato di una omotetia possiamo comporre insieme una omotetia e una traslazione e far vedere che viene sempre una omotetia. Se invece componiamo insieme due omotetie sembra a prima vista venire sempre un'altra omotetia ma il risultato non è generalizzabile; infatti basta comporne una che ingrandisca di un fattore ad esempio $k = 2$ e un'altra che rimpicciolisca di un fattore ½ per ottenere una traslazione. Inoltre si può facilmente mostrare che:
1. i perimetri di due poligoni omotetici sono in rapporto k;
2. le aree di due figure omotetiche sono in rapporto k^2;
3. una circonferenza di centro C e raggio r viene trasformata in un'altra circonferenza di centro C′ (omotetico di C) e raggio $r' = |k|r$.

Mediante il concetto di omotetia si può facilmente[4] dimostrare la seguente proposizione dovuta ad Eulero (1707 – 1783):

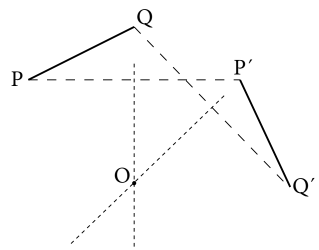
4. da una lezione del prof. Claudio Bernardi.

Osservazione 1.2 Le traslazioni conservano le distanze e quindi possono essere definite anche come trasformazioni isometriche o *isometrie*. A volte le isometrie vengono designate col nome di movimenti rigidi, per sottolineare il fatto che la figura isometrica ottenuta si può sovrapporre a quella di partenza mediante un opportuno spostamento (come si fa nelle dimostrazioni dei criteri di congruenza). Le isometrie di un piano formano un gruppo perché il prodotto di due isometrie è una isometria; il prodotto è associativo; di ogni isometria esiste l'isometria inversa e l'elemento neutro. Oltre la traslazione le altre isometrie sono: la rotazione, la simmetria centrale e la simmetria assiale. In una rotazione sembra ragionevole supporre che un punto resti fisso e quindi:

Definizione 1.4 *Rotazione*
Una rotazione è una isometria con un punto unito.

Una rotazione è univocamente determinata quando siano date due coppie di punti corrispondenti PP′ e QQ′, tali che i segmenti PQ, P′Q′ siano uguali e i segmenti PP′, QQ′ non siano paralleli. Supponiamo allora di avere questi quattro punti P, P′, Q e Q′, dato un altro punto R qualsiasi come si trova il suo trasformato R′?

Costruzione 1.3 Affinché la rotazione porti P su P′ è necessario che il centro O si trovi sull'asse di PP′; analogamente O deve trovarsi sull'asse di QQ′. L'intersezione dei due assi è il centro della rotazione. Con geogebra, una volta trovato il centro, misuriamo l'angolo di rotazione con la funzione *angolo* e poi, dato un punto qualsiasi, troviamo il corrispondente mediante la funzione *angolo di data misura*. Notiamo che un punto e un angolo orientato determinano univocamente una rotazione.

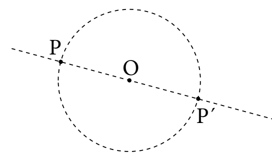


Esercizio 1.3 creato lo strumento per ottenere il trasformato in una rotazione, possiamo comporre insieme due rotazioni di ampiezza α e β e mostrare che si ottiene una rotazione di ampiezza $\alpha + \beta$ se $\alpha + \beta \neq 2\pi$ e una traslazione se $\alpha + \beta = 2\pi$.

Definizione 1.5 *Simmetria centrale*
Una simmetria centrale di centro O è una rotazione intorno ad O di ampiezza π.

Per semplicità è preferibile eseguire la costruzione della simmetria centrale a parte e non come caso particolare della rotazione. Supponiamo di avere un punto O (centro) e un altro punto P qualsiasi. Come si trova il trasformato P′?

Costruzione 1.4 si traccia la circonferenza di centro O e raggio OP, P′ è semplicemente l'altra intersezione della circonferenza con la retta OP.

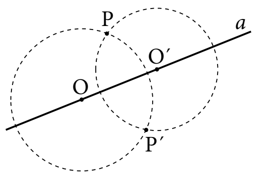


Esercizio 1.4 creato lo strumento per ottenere il trasformato di una simmetria centrale possiamo far

vedere che una retta si trasforma in un'altra retta parallela, una circonferenza si trasforma in una circonferenza di ugual raggio, avente centro nel simmetrico del centro della prima[2]. Inoltre se F e F′ sono due figure simmetriche rispetto ad O e se AB e A′B′ sono due segmenti corrispondenti delle due figure, allora ABA′B′ è un parallelogramma, perché le diagonali si dimezzano scambievolmente. Quindi due segmenti corrispondenti di due figure simmetriche rispetto ad un punto sono uguali, paralleli e di versi opposti.

Definizione 1.6 *Simmetria assiale*
Una simmetria assiale è una isometria con infiniti punti uniti tutti allineati.
Una simmetria è univocamente determinata quando sia dato l'insieme di tutti i suoi punti uniti che si chiama asse. Supponiamo allora di avere quest'asse, dato un punto P qualsiasi, come si trova il suo trasformato P′?

Costruzione 1.5 Si prenda un punto O qualsiasi sull'asse. Dal momento che il punto O è unito e la simmetria è una particolare isometria il punto P′ dovrà trovarsi sulla circonferenza di dentro O e raggio OP. Tracciamo questa circonferenza, poi prendiamo un altro punto qualsiasi O′ sempre sull'asse e tracciamo un'altra circonferenza di centro O′ e raggio O′P; l'intersezione delle due circonferenza è il punto P′ cercato.



Osservazione 1.3 Ogni punto dell'asse corrisponde a se stesso, quindi l'asse di una simmetria assiale è una retta unita ed è luogo di punti uniti. Anche le rette perpendicoli all'asse sono unite, ma i loro punti non lo sono (tranne uno).

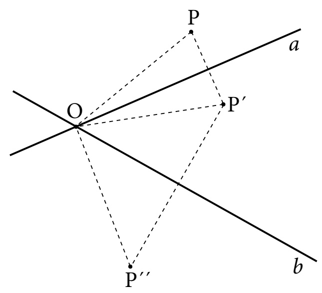
Osservazione 1.4 Traslazioni e rotazioni (incluse le simmetrie centrali) costituiscono il gruppo delle isometrie *dirette*, ovvero quei movimenti rigidi che si possono eseguire "rimanendo" nel piano. Al contrario una simmetria assiale è un'isometria *inversa*: per eseguirla occorre un ribaltamento cioè una operazione nello spazio[3]. Componendo una traslazione con una simmetria assiale otteniamo un'altra isometria inversa priva di punti uniti che si chiama:

Definizione 1.7 *Glissosimmetria (o antitraslazione)*
Una glissosimmetria e la composizione di una traslazione con una simmetria assiale.

Esercizio 1.5 creato lo strumento con geogebra consideriamo due simmetrie i cui assi, *a* e *b*, si incontrino in un punto O. Sia P un punto qualsiasi del piano; costruiamo il simmetrico P′ rispetto ad *a*; successivamente, costruiamo il simmetrico P′′ di P′ rispetto a *b*. Notiamo che vale la seguente:

Proposizione 1.3 Il prodotto di due simmetrie assiali ad assi incidenti è una rotazione che ha come centro l'intersezione dei due assi e come ampiezza il doppio dell'angolo formato dai due assi.

2. per vedere le figure trasformate basta muovere il punto sulla figura di partenza e attivare per il punto trasformato la funzione traccia attiva nel menù contestuale.
3. più rigorosamente una isometria diretta oltre a corservare le distanze conserva gli angoli in grandezza e *verso*.



dim. *a* è l'asse del segmento PP′ quindi O è equidistante da P e P′; *b* è l'asse del segmento P′P′′ quindi O è equidistante da P′ e P′′; segue che i tre punti P, P′, P′′ sono alla stessa distanza da O. Inoltre, *a* biseca l'angolo POP′ e *b* biseca l'angolo P′OP′′. Segue che l'angolo P′OP′′ è doppio dell'angolo formato dai due assi.

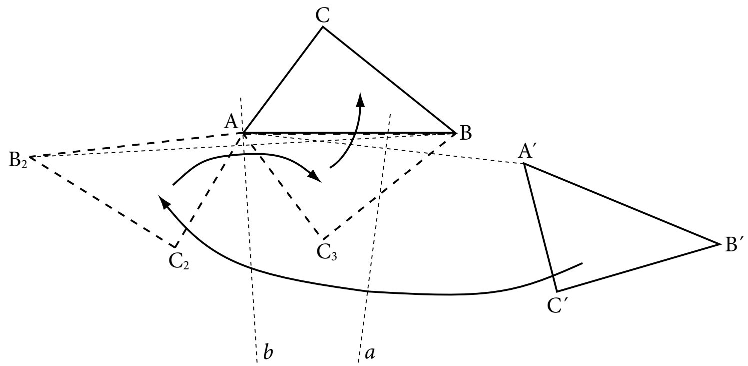
Se i due assi sono paralleli è facile mostrare la seguente:
Proposizione 1.4 Il prodotto di due simmetrie assiali ad assi paralleli è una traslazione di direzione perpendicolare ai due assi e di ampiezza doppia della distanza dei due assi stessi.

Osservazione 1.5 Le isometrie formano un gruppo non commutativo rispetto alla composizione; per convincersene basta pensare ad un punto qualsiasi, ruotarlo rispetto ad un altro di un certo angolo e poi traslarlo di un dato vettore; se ripetiamo le operazioni invertendo l'ordine è facile notare che il punto finale in generale è diverso. Comunque, se ci limitiamo alle sole traslazioni vale la commutatività.

Il teorema fondamentale delle isometrie

La simmetria assiale è molto versatile perché componendone insieme due si può avere sia una rotazione che una traslazione; siccome qualsiasi spostamento rigido si può pensare come la composizione di una traslazione e di una rotazione sembra ragionevole pensare che qualsiasi isometria si possa ottenere componendo insieme più simmetrie assiali. In particolare, dimostriamo la seguente

Proposizione 1.5 Dati su un piano due triangoli uguali (isometrici), si può portarli a coincidere con, al più, tre simmetrie assiali.
dim. Siano ABC e $A_1B_1C_1$ due triangoli uguali; dobbiamo dimostrare che, scegliendo opportunamente al più tre simmetrie e applicandole in sequenza, riusciremo a far coincidere A_1 con A, B_1 con B e C_1 con C.



Come prima simmetria scegliamo quella che ha come asse l'asse del segmento AA_1 (indicato in figura